Exercices 2 – Récurrence & Méthodes algébriques - Corrigés

Exercice 1. — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \dfrac{4!}{2!}$

$A = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

2) $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$

$B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!} = \dfrac{5!}{6!} \times \dfrac{4!}{3!} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

3) $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

$C = \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1$

4) $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$

$D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!} = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2) \times (n+1) \times n!} = \dfrac{1}{n+2}$

5) $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

$E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$

6) $F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$

$F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)!}{n!} \times \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{n+1}{n}$

Raisonnement par récurrence

Exercice 2. — Soit (u_n) la suite réelle donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

D'après l'énoncé : $u_0 = 0$. On déduit que : $u_1 = 2u_0 + 1 \iff u_1 = 1$. D'où : $u_2 = 2u_1 + 1 \iff u_2 = 3$. D'où : $u_3 = 2u_2 + 1 \iff u_3 = 7$.

Conclusion. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 7$

2) A l'aide de la question précédente, conjecturer l'expression du terme général u_n en fonction de n. Puis démontrer cette conjecture.

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$: $u_n = 2^n - 1$.

Initialisation $(n = 0)$. On a : $2^0 - 1 = 0 = u_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{(énoncé)}} 2u_n + 1 \underbrace{=}_{\text{(HR)}} 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Finalement : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$

Exercice 3. — Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n$.

On déduit de l'énoncé que : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 4\dots$ On peut donc conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n+1$, ce que l'on démontre par récurrence.

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$: $u_n = n+1$.

Initialisation $(n = 0)$. On a : $0+1 = 1 = u_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{(énoncé)}} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n \underbrace{=}_{\text{(HR)}} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)(n+1) = \dfrac{n+2}{n+1}(n+1) = n+2$

Finalement : $u_{n+1} = n+2$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n+1$

Exercice 4. — **(Suite de Wallis)**. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$: $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

Initialisation $(n = 0)$. On a : $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^0(0!)^2} = 1 = u_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} \underbrace{=}_{\text{(énoncé)}} \dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n} \underbrace{=}_{\text{(HR)}} \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{2n+2}{2n+2} \times \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Finalement : $u_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Exercice 5. — Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

Initialisation $(n = 0)$. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k! = 0! = 1 \leqslant (0+1)!$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \underbrace{\leqslant}_{\text{(HR)}} 2 \times (n+1)! \leqslant (n+2) \times (n+1)! \leqslant (n+2)!$

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k! \leqslant (n+2)!$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Sommes

Exercice 6. — Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,;\quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} i\,;\quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} n.$

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (cours) ; $\quad S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} i = ni\,;\quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} n = n^2$

Exercice 7. — Parmi les formules ci-dessous, déterminer lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{d=1}^{n} b_d$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j$

e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^N = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^N$

f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

La formule a) est fausse : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda + a_k) = \lambda n + \sum_{k=1}^{n} a_k$

La formule b) est correcte (linéarité de la somme)

La formule c) est correcte (linéarité encore une fois)

La formule d) est fausse en général : $(a+b)(c+d)$ est rarement égal à $ab + cd$...

La formule e) est fausse, en tant que variante de la précédente...

La formule f) est correcte (c'est une “somme carrée”, je vous expliquerai cela).

Exercice 8. — Soit $q \in \mathbb{C}$, et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k$.

Si $q \neq 1$, on a : $\quad S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k = q^2 \times \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$

Si $q = 1$, on a : $\quad S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} 1 = n - 1$

Exercice 9. — Soit $q \in \mathbb{C}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{2k}$.

Si $q \neq \pm 1$, on a : $\quad S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(q^2\right)^k = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$

Si $q = \pm 1$, on a : $\quad S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Exercice 10. — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3 \times \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^{2i}} = 3 \times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{9}\right)^i = 3 \times \frac{2}{9} \times \frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

Exercice 11. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k+2)$.

C'est une application directe du cours :

$$\sum_{k=0}^{n} k\,(k+2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Exercice 12. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(2k^2-k+1\right)(k+1)$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(2k^2-k+1\right)(k+1) = \sum_{k=1}^{n} 2k^3+k^2+1 = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n.$$

Exercice 13. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k\,(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 14. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+2}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$.

Problème : la somme obtenue n'est alors pas télescopique, et on ne sait donc pas la calculer écrite sous cette forme. On la réécrit donc de la manière diabolique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right]$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right]$$

Conclusion. $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$

Exercice 15. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$.[1]

Par identification, on obtient :

$$a = c = \frac{1}{2} \text{ et } b = -1$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

L'astuce consiste à observer que $2 = 1 + 1\ldots$ On peut ainsi réécrire la somme précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$$

1. On pourra déterminer trois réels a, b et c tels que : $\displaystyle\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right]$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$

Exercice 16. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Pour tout entier naturel non nul n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n > 0.$

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 17. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Etudier le sens de variation, puis prouver la convergence de cette suite.

Pour tout entier naturel non nul n on obtient après calculs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Comme la suite (u_n) est par ailleurs clairement à termes positifs, elle est minorée (par 0).
Conclusion. La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

Exercice 18. — Pour $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$.

En calculant $qS_n - S_n$, déterminer la valeur de S_n.

On a :

$$qS_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - kq^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1)\,q^{k+1} - kq^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,q^{k+1} - kq^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = (n+1)q^{n+1} - q\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ldots$$

Exercice 19. — Etablir que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

En déduire que pour tout entier naturel N non nul on a : $1 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On a : $0 < n^2 - n \leqslant n^2$. D'où : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2-n}$

Par ailleurs : $\dfrac{1}{n^2-n} = \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ (décomposition en éléments simples)

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

Par ailleurs : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$

On déduit des deux lignes précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{N}$. En particulier : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$

Comme il est par ailleurs clair que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \geqslant 1$, on en déduit l'encadrement de l'énoncé.

Conclusion. $1 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$

Exercice 20. — 1) Prouver que pour tout entier non-nul n, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse étant décroissante sur $[n, n+1]$, on a :

$$\forall x \in [n, n+1], \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

En intégrant cet encadrement sur $[n, n+1]$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

2) En déduire que pour tout entier non-nul N, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} [\ln(n+1) - \ln n]$.

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)$

3) En déduire la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Il est connu que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$.

On déduit de cette extraordinaire remarque, de la question précédente et de la propriété de comparaison que :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

Exercice 21. — Soit x un nombre réel différent de -1. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Soit x un nombre réel différent de -1, et soit n un entier naturel.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$

Cette somme est géométrique de raison $(-x)$; et $(-x) \neq 1$ par hypothèse. On peut donc appliquer la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

En résumé :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

Exercice 22. — Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Exercice 23. — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} 2^j = \sum_{i=1}^{n} i \left(2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \right) = 2\left(2^n - 1\right) \sum_{i=1}^{n} i = \left(2^n - 1\right) n(n+1)$$

Exercice 24. — Soit z un complexe quelconque. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z^{i+j}$ (c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z^{i+j}$)

Si $z \neq 1$: $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z^{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z^i \times z^j = \sum_{i=1}^{n} z^i \sum_{j=1}^{n} z^j = \left(z \times \frac{1-z^n}{1-z}\right)^2$

Si $z = 1$: $\displaystyle S = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Produits

Exercice 25. — Soit n un entier $\geqslant 2$. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, puis le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2}$ (produit télescopique)

$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$ (produit télescopique)

Exercice 26. — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2n}$ (d'après l'exo 25)

Factorielles

Exercice 27. — * Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

Ayant reconnu une somme télescopique, on peut conclure : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Exercice 28. — * Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k \times k!)$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k \times k!) = \sum_{k=0}^{n}((k+1-1)\times k!) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$ (somme télescopique)

Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 29. — Soit n un entier naturel. Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$

Notons que : $S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$

Selon le binôme de Newton : $S_n = \frac{1}{3}(3+1)^n = \frac{4^n}{3}$

Exercice 30. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Selon le binôme de Newton : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n$.

On en déduit que $S_0 = 1$, et $S_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31. — 1) Soient n et p dans $\mathbb{N}$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que : $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$

On a : $p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n \binom{n-1}{p-1}$

2) En déduire que : $\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$

On a : $\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} = n2^{n-1}$

Exercice 32. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

D'après la formule du binôme de Newton, on a : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$

Exercice 33. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-x)^{3n-2k} x^k$

Avec les notations de l'énoncé on a :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-x)^{3n-2k} x^k = (1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3x)^k \left[(1-x)^2\right]^{n-k}$$
$$= (1-x)^n \left[3x + (1-x)^2\right]^n = (1-x)^n (1+x+x^2)^n$$

Extraits de DS

Exercice 34. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}\, u_n$$

1/ Calculer les valeurs de u_1 et u_2.

D'après l'énoncé, on a : $u_1 = \dfrac{2}{5}\, u_0 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3}$. D'où : $\boxed{u_1 = \dfrac{4}{15}}$.

De même, on a : $u_2 = \dfrac{4}{7}\, u_1 = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{4}{15}$. D'où : $\boxed{u_2 = \dfrac{16}{105}}$.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$$

Notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$.

➤ **Initialisation** $(n = 0)$. D'après l'énoncé : $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2^{2\times 0+3}\,(0+2)!\; 0!}{(2 \times 0 + 4)!} = \dfrac{8 \times 2}{4!} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$. L'assertion $P(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons que l'assertion $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n.

D'après l'énoncé on a : $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}\, u_n$.

On en déduit, par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$.

On écrit alors judicieusement :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!} \times \frac{2n+6}{2n+6}$$

On en déduit que : $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!2(n+3)}{(2n+5)(2n+4)!(2n+6)}$ soit : $u_{n+1} = \dfrac{2^{2n+5}\,(n+3)!\;(n+1)!}{(2n+6)!}$

Cette dernière égalité signifiant que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, on a établi l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$

Exercice 35. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n\left(n^2+1\right)}{2} \in \mathbb{N}$

On raisonne par disjonction de cas, suivant la parité de n.

Si n est pair, alors $\dfrac{n}{2}$ est un entier naturel. Donc : $\dfrac{n}{2}(n^2+1) \in \mathbb{N}$.

Si n est impair, alors $\dfrac{n^2+1}{2}$ est un entier naturel. Donc : $\dfrac{n^2+1}{2} n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n\left(n^2+1\right)}{2} \in \mathbb{N}$

Exercice 36. — $\boxed{\text{(Sommes)}}$

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$.

On a : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k)\right)$

On réécrit alors diaboliquement la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

D'où : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) + \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

$\iff S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$ (linéarité de la somme)

$\iff S_1 = \ln(n+2) - \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(2)$ (sommes télecopiques)

Conclusion. $S_1 = \ln\left(\dfrac{(n+2)(n+1)}{6}\right)$

2/ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^n \, \mathrm{e}^{nx} \, \mathrm{ch}^n(x)$$

On a : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^k$.

Selon le binôme de Newton : $S_2 = \left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^n$.

D'où : $S_2 = \left[\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]^n = \left[\mathrm{e}^{x} 2\mathrm{ch}(x)\right]^n = \mathrm{e}^{nx} 2^n \mathrm{ch}^n(x)$.

Conclusion. $S_2 = 2^n \, \mathrm{e}^{nx} \, \mathrm{ch}^n(x)$

Exercice 37. — (Coefficients binomiaux)

Lorsque l'on considère une ligne de rang pair du triangle de Pascal, on peut observer que le plus grand coefficient binomial est situé au milieu de la ligne.

*Par exemple, la ligne "2" du triangle de Pascal est : 1 – **2** – 1 ; et la ligne "4" est : 1 – 4 – **6** – 4 – 1.*

L'objectif de cet exercice est de donner la preuve de cette observation.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Pour tout entier naturel k, on pose :

$$u_k = \binom{2n}{k}$$

1/ Donner sans justification les valeurs de u_0, u_1, et u_2.

Observons que d'après l'énoncé, $2n \geqslant 2$. On a donc, d'après le cours :

$$u_0 = \binom{2n}{0} = 1\,; \qquad u_1 = \binom{2n}{1} = 2n\,; \qquad u_2 = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2}$$

Conclusion. $u_0 = 1\,; \quad u_1 = 2n\,; \quad u_2 = n(2n-1)$

2/ Que vaut u_k lorsque $k \geqslant 2n+1$?

D'après le cours : $\displaystyle\binom{2n}{k} = 0$ si $k > 2n$.

Conclusion. $u_k = 0$ lorsque $k \geqslant 2n+1$.

3/ Soit $k \in [\![\, 0, 2n-1 \,]\!]$. Etablir que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2n-k}{k+1}$$

Soit $k \in [\![\, 0, 2n-1 \,]\!]$. On a : $u_{k+1} = \displaystyle\binom{2n}{k+1}$ et $u_k = \displaystyle\binom{2n}{k}$.

Or, d'après le cours : $u_{k+1} = \dfrac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}$ et $u_k = \dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$.

On en déduit que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2n)!k!(2n-k)!}{(k+1)!(2n-k-1)!(2n)!} = \frac{k!(2n-k)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}$$

Conclusion. $\forall\, k \in [\![\, 0, 2n-1 \,]\!], \quad \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{2n-k}{k+1}$

4/ En déduire que :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \quad \text{et} \quad u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant u_{2n}$$

Pour tout entier $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, le nombre u_k est un entier strictement positif.

Il s'ensuit que pour tout entier $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, on a :

$$[u_{k+1} \geqslant u_k] \Longleftrightarrow \left[\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1\right]$$

On en déduit, avec la question précédente, que :

$u_{k+1} \geqslant u_k$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2n-k}{k+1} \geqslant 1$

$\Longleftrightarrow 2n-k \geqslant k+1$

$\Longleftrightarrow 2k+1 \leqslant 2n$

$\Longleftrightarrow k \leqslant n - \dfrac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow k \leqslant n-1$

En résumé : $[u_{k+1} \geqslant u_k] \Longleftrightarrow [k \leqslant n-1]$

Il s'ensuit que : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \quad \text{et} \quad u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant u_{2n}$