Colle 2 – Questions de cours

Question de cours n°1 — Application du binôme de Newton : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n \quad (\spadesuit)}$.

D'après la formule du binôme de Newton *, on a également : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad (\heartsuit)}$.

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

➤ La fonction f est dérivable † sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$.

D'une part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n\,(1+x)^{n-1} \quad (\diamondsuit)}$ Et d'autre part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \quad (\clubsuit)}$

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules $(\diamondsuit)$ et $(\clubsuit)$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$

Question de cours n°2 — **"Série harmonique"**. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse étant décroissante sur $[n, n+1]$, on a : $\forall\, x \in [n, n+1]\,,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$. En intégrant cet encadrement sur $[n, n+1]$, on en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$. ‡

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} [\ln(n+1) - \ln n]$. La somme de droite étant télescopique, on en déduit : $\boxed{\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)}$. Or il est connu que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$. On déduit de cette extraordinaire remarque, de la question précédente et de la propriété de comparaison que : $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) = +\infty}$.

---

*. $\forall\, (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

†. Car f est polynomiale.

‡. Seule l'inégalité de droite nous intéresse dans la présente situation.

Question de cours n^{0}3 — **Propriétés des congruences.** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

1/ **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \equiv x\,[A]$

2/ **Symétrie** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (y \equiv x\,[A]) \Longleftrightarrow (x \equiv y\,[A])$

3/ **Transitivité** : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv y\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$

1/ Pour tout réel x, on a : $x = x + 0 \times A$, d'où : $x \equiv x\,[A]$.

2/ Soient x et y deux réels tels que : $y \equiv x\,[A]$. Alors : $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$. D'où : $x = y + (-k)A$, soit encore : $x = y + k'A$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. D'où : $x \equiv y\,[A]$.
On a ainsi établi l'implication : $(y \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (x \equiv y\,[A])$. L'implication réciproque (et donc l'équivalence) provient de ce que les réels x et y jouent des rôles symétriques dans cet énoncé.

3/ Soient x, y et z trois réels tels que : $y \equiv x\,[A]$ et $z \equiv y\,[A]$. Alors : $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$ et $\exists\, k' \in \mathbb{Z},\ z = y + k'A$.
D'où : $z = x + (k + k')\,A$. Puisque $(k + k') \in \mathbb{Z}$, cette égalité signifie que : $z \equiv x\,[A]$.
Par suite : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv y\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$.

Remarque : *les trois énoncés de la propriété ci-dessus signifient que la relation "être congru à" (ou relation de congruence) est ce que l'on appelle une* ***relation d'équivalence****. Nous aurons de nombreuses occasions de revoir cette notion en cours d'année (dans le cadre des matrices, des fonctions, des suites, en arithmétique et en algèbre linéaire).*

Question de cours n^{0}4 — **Maths / Physique**. Pour tout couple de réels (a,b), il existe un couple de réels (K,φ) tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)$

Soient a et b deux nombres réels. On distingue deux cas.

➤ **Premier cas :** $(a,b) = (0,0)$. Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = 0$. Le couple $(0,\varphi)$ (φ étant un réel quelconque) convient.

➤ **Second cas :** $(a,b) \neq (0,0)$. Dans ce cas : $\sqrt{a^2+b^2} > 0$. On peut donc écrire pour tout réel x :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{K}\left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{A}\cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{B}\sin(x)\right)$$

Il résulte de la définition des réels A et B que : $A^2 + B^2 = 1$.

Par conséquent : $\exists\, \varphi \in \mathbb{R},\ A = \cos(\varphi) \wedge B = \sin(\varphi)$.

D'où pour tout réel x :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = K\left[\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)\right] = K\cos(x - \varphi)$$

On a ainsi établi que :

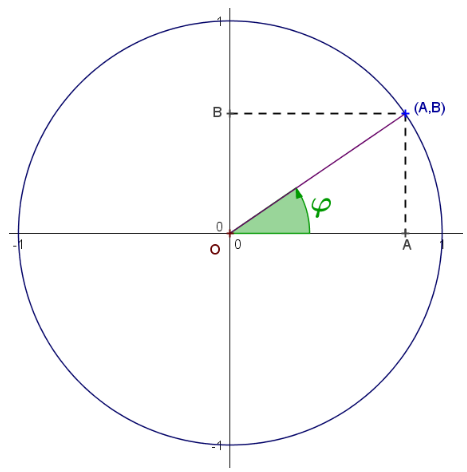
$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (K,\varphi),\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)}$$

Remarque : *la condition $A^2+B^2 = 1$ signifie que le point M de coordonnées (A,B) est tel que $OM = 1$.*

Autrement dit, la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que (A,B) est le couple des coordonnées d'un point situé sur le cercle trigonométrique.

A ce titre, il existe un réel φ tel que $A = \cos(\varphi)$ et $B = \sin(\varphi)$.

Observation : un tel réel φ n'est pas unique, car n'est défini qu'à un multiple de 2π près.



Banque d'exercices

Exercice 1. — Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

Exercice 2. — Valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Exercice 3. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

Exercice 4. — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$

Exercice 5. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^n \, \mathrm{e}^{nx} \, \mathrm{ch}^n(x)$$

Exercice 6. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

Observons que : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$. Selon une (des trois) formule de duplication pour le cos, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

Il s'ensuit que :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Or, puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 2. — Valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Selon la formule de soustraction pour tan :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Conclusion. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 3. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

C'est un exemple de calcul de somme à l'aide de la décomposition "rangs pairs / rangs impairs".

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut déjà observer que : $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ (le terme de cette somme correspondant à $k = 0$ étant nul).

Puis :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \underbrace{\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k}_{S_2} + \underbrace{\sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k}_{S_3} \qquad (\spadesuit)$$

— **Réécriture de la somme S_2.** On a : $S_2 = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k$

Or les entiers k pairs compris entre 0 et $2n$ sont exactement ceux qui s'écrivent $2m$, avec $m \in [\![0, n]\!]$.

Par conséquent : $S_2 = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{2m} 2m \Longleftrightarrow S_2 = \sum_{m=0}^{n} 2m \qquad (\clubsuit)$

— **Réécriture de la somme S_3.** On a : $S_3 = \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k$

Or les entiers k impairs compris entre 0 et $2n$ sont exactement ceux qui s'écrivent $2m+1$, avec $m \in [\![0, n-1]\!]$.[§]

Par conséquent : $S_3 = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{2m+1} (2m+1) \Longleftrightarrow S_3 = -\sum_{m=0}^{n-1} (2m+1) \qquad (\heartsuit)$

§. Attention au petit décalage.

On déduit de (♠), (♣) et (♡) que :

$$S_1 = \sum_{m=0}^{n} 2m - \sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) = 2n + \sum_{m=0}^{n-1}\left[2m-(2m+1)\right] = 2n - \sum_{m=0}^{n-1} 1 = 2n - n = n$$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$

REMARQUE. Ce qui précède est un corrigé archi-détaillé. Aux Concours, et lors de la colle de la semaine prochaine, il ne sera pas nécessaire de détailler autant ce calcul (en particulier les explications des réécritures des sommes S_2 et S_3). Explicitement, on pourra se contenter d'écrire :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n} (-1)^k k = \sum_{m=0}^{n} 2m - \sum_{m=0}^{n-1}(2m+1)$$

le tout étant de comprendre (et en colle, d'expliquer) la dernière égalité.

EXERCICE 4. — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$

On a : $S = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k)\right)$

On réécrit alors diaboliquement la somme S :

$$S = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

D'où : $S = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) + \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

$\Longleftrightarrow S = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$ (linéarité de la somme)

$\Longleftrightarrow S = \ln(n+2) - \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(2)$ (sommes télecopiques)

CONCLUSION. $S = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{6}\right)$

EXERCICE 5. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^n e^{nx} \operatorname{ch}^n(x)$$

On a : $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{2kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{2x}\right)^k$.

Selon le binôme de Newton : $S_2 = \left(e^{2x}+1\right)^n$.

D'où : $S_2 = \left[e^x\left(e^x + e^{-x}\right)\right]^n = \left[e^x 2\operatorname{ch}(x)\right]^n = e^{nx} 2^n \operatorname{ch}^n(x)$.

CONCLUSION. $S_2 = 2^n e^{nx} \operatorname{ch}^n(x)$

EXERCICE 6. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos^6(x)+\sin^6(x)=1$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos^6(x)+\sin^6(x)=1\\
\Longleftrightarrow\ &\cos^6(x)+\sin^6(x)=\Big(\underbrace{\cos^2(x)+\sin^2(x)}_{=1}\Big)^3\\
\Longleftrightarrow\ &\cos^6(x)+\sin^6(x)=\cos^6(x)+3\cos^4(x)\sin^2(x)+3\cos^2(x)\sin^4(x)+\sin^6(x)\\
\Longleftrightarrow\ &3\cos^4(x)\sin^2(x)+3\cos^2(x)\sin^4(x)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\cos^4(x)\sin^2(x)+\cos^2(x)\sin^4(x)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\cos^2(x)\sin^2(x)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\cos(x)=0\quad \text{ou}\,\sin(x)=0\\
\Longleftrightarrow\ &x=0\quad\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

CONCLUSION. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $\left[\cos^6(x)+\sin^6(x)=1\right]\Longleftrightarrow\left[x=0\quad\left[\frac{\pi}{2}\right]\right]$