Colle 3 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Conjugaison et somme** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{z_1+z_2+\cdots+z_n} = \overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : $\forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\, z_1 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1} = \overline{z_1}$, wouaouh.

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a :

$$\overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} + \overline{z_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} + \overline{z_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$$

la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les sommes, la seconde de la propriété $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$, la troisième de l'hypothèse de récurrence, et la dernière de la relation de Chasles pour les sommes à nouveau.

Finalement : $\overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \overline{\sum_{k=1}^{n+1} z_k} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$.

Question de cours n^{0}2 — **2 propriétés des modules** :

$$\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |zz'| = |z|\times|z'| \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n$$

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. On a : $|zz'| = \sqrt{z\times z'\times\overline{z\times z'}} = \sqrt{z\times z'\times\overline{z}\times\overline{z'}} = \sqrt{z\times\overline{z}\times z'\times\overline{z'}} = \sqrt{z\times\overline{z}}\times\sqrt{z'\times\overline{z'}} = |z|\times|z'|$

Ce qui prouve que : $\boxed{\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |zz'| = |z|\times|z'|}$

La deuxième s'en déduit par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |z^n| = |z|^n$.

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(0)$ est vraie puisque : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \left|z^0\right| = 1 = |z|^0$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left|z^{n+1}\right| = |z^n\times z| = |z^n|\times|z| = |z|^n\times|z| = |z|^{n+1}$$

la deuxième égalité provenant de la propriété précédemment démontrée, et la troisième de l'hypothèse de récurrence.

En résumé : $\left|z^{n+1}\right| = |z|^{n+1}$. Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie.

➤ $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n}$

Question de cours n^{0}3 — **Inégalité triangulaire généralisée** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : $\forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\, z_1 \in \mathbb{C},\ |z_1| \leqslant |z_1|$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

D'après l'inégalité triangulaire "basique" ($|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$), on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| \qquad \text{d'où : } \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

En résumé : $\forall\,(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. $P(n+1)$ est donc vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Question de cours n^{0}4 — $(\mathbb{U},\times)$ **est un groupe** : stabilité de $\mathbb{U}$ par multiplication et passage à l'inverse, existence d'un élément neutre. Explicitement :

$$\mathbf{1}/\ \forall\,(z,z')\in\mathbb{U}^2,\ z\times z'\in\mathbb{U}\qquad \mathbf{2}/\ 1\in\mathbb{U}\qquad \mathbf{3}/\ \forall\,z\in\mathbb{U},\ \frac{1}{z}\in\mathbb{U}$$

Rappelons que : $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Il est donc déjà clair que $1\in\mathbb{U}$, puisque $|1|=1$.

Prouvons le point **1**/ : soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$. Alors : $|z\times z'|=|z|\times|z'|=1\times 1=1$.
Finalement : $|z\times z'|=1$. D'où $z\times z'\in\mathbb{U}$. Ce qui achève la preuve de ce point.

Prouvons le point **3**/ : soit z un élément de $\mathbb{U}$. Alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{1}=1$.

Finalement : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=1$. D'où $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{U}$. Ce qui achève la preuve de ce point, et de ces propriétés.

Comme la remarque en a été très justement faite en cours, $(\mathbb{U},\times)$ **est même un groupe abélien, ce qui signifie que la multiplication dans** $\mathbb{U}$ **est commutative. Nous aurons l'occasion de revoir, de préciser et d'approfondir cette notion de groupe dans de nombreux chapitres cette année.**

Question de cours n^{0}5 — **Propriété** : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\,(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y))=\Bigg(\underbrace{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}_{=\cos(x+y)}\Bigg)+\mathrm{i}\,\Bigg(\underbrace{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}_{=\sin(x+y)}\Bigg)$$

Ainsi : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y)\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}$ **Conclusion**. $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$

Question de cours n^{0}6 — **Formules d'Euler** : pour tout réel x on a : $\cos(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ et $\sin(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$

Soit x un réel. On a : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2}=\dfrac{2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}{2}=\cos(x)$

Et : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}{2\mathrm{i}}=\sin(x)$

Question de cours n^{0}7 — **Formule de Moivre** : $\forall\,(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N},\quad (\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^n=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$

Soit $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$. On a : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, ce qui achève la preuve.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice 2. — Linéarisation de $\cos^3(\theta)$.

Exercice 3. — Linéarisation de $\cos^4(\theta)$.

Exercice 4. — Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Exercice 5. — Délinéarisation de $\cos(4\theta)$.

Exercice 6. — Soit $\theta \in [0, \pi[$. Module et argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right)$ et $\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right)$. *

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right), \text{ et de façon analogue : } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right)$$

Il "ne reste plus qu'à" calculer la somme entre parenthèses pour achever la question de cours. En effet, en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}, \text{ on a donc : } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)} \text{ et } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}(S_n) \quad (\clubsuit)}$$

Or : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien †, sous réserve que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \neq 0 \ \ [2\pi]$.

On suppose donc $\theta \neq 0 \ \ [2\pi]$. Alors :

$$S_n = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \iff S_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \quad \textit{(technique de "l'angle-moitié")}$$

$$\iff S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq 0 \ \ [2\pi]\,,\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Dans le cas où $\theta = 0 \ \ [2\pi]$, on a $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ d'où

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \theta = 0 \ \ [2\pi]\,,\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0}.$$

Exercice 2. — Linéarisation de $\cos^3(\theta)$.

Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \qquad \text{d'où : } \cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit ‡ que :

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{8}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,\theta}}_{=2\cos(3\theta)} + \underbrace{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}_{=6\cos(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$

∗. Puisqu'en général pour tout réel ☺, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}☺} = \cos(☺) + \mathrm{i}\sin(☺)$. Prendre ☺ $= k\theta$ dans la présente situation.

†. $\displaystyle \forall\, q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

‡. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercice 3. — Linéarisation de $\cos^4(\theta)$.

Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4$$

Il s'ensuit [§] que :

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}_{=2\cos(4\theta)} + \underbrace{4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta}}_{=8\cos(\theta)} + 6\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) = \dfrac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}}$

Exercice 4. — Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Il s'ensuit que [¶] :

$$\sin^5(\theta) = \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^5}{(2i)^5} = \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right)$$

Donc :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32i}\left(\underbrace{e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}}_{=2i\sin(5\theta)} - 5\left(\underbrace{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}_{=2i\sin(3\theta)}\right) + 10\left(\underbrace{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}_{=2i\sin(\theta)}\right)\right)$$

Par suite :

$$\sin^5(\theta) = \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5\theta) - 10i\sin(3\theta) + 20i\sin(\theta)\right)$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin^5(\theta) = \dfrac{1}{16}\sin(5\theta) - \dfrac{5}{16}\sin(3\theta) + \dfrac{5}{8}\sin(\theta)}$

Exercice 5. — Délinéarisation de $\cos(4\theta)$.

Soit θ un réel. On a : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[e^{i\theta}\right]^4\right)$.

Par suite [‖] : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left([\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4\right) \qquad (\spadesuit)$

Or :

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1}$

---

§. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

¶. Essentiellement car : $2^5 = 32$; $i^5 = i$; et $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

‖. On peut d'ailleurs se passer de la ligne précédente, en utilisant directement la formule de Moivre.

Exercice 6. — Soit $\theta \in [0, \pi[$. Module et argument de $1 + e^{i\theta}$?

Soit $\theta \in [0, \pi[$. En utilisant la technique de l'angle-moitié, on écrit :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(\frac{1}{e^{i\theta/2}} + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta/2}}\right) = e^{i\theta/2}\underbrace{\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right)}_{=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$$

En résumé : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.

Il reste à observer que dans cette écriture :

- $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un réel strictement positif, puisque $0 \leqslant \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$
- $e^{i\theta/2} \in \mathbb{U}$ (le nombre complexe $e^{i\theta/2}$ est de module 1)

On en déduit que : $\boxed{\left|1 + e^{i\theta}\right| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg\left(1 + e^{i\theta}\right) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]}$