Exercices 4 – Nombres Complexes – Corrigé

Modules

Exercice 1. — (Modules et lieux géométriques). Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que :

1/ $|z-1|=2$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z, et A le point du plan complexe d'affixe 1. On a : $|z-1|=2 \Longleftrightarrow AM=2$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|z-1|=2$ est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

2/ $z\overline{z}=16$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z. On a : $z\overline{z}=16 \Longleftrightarrow |z|^2=16 \Longleftrightarrow |z|=4 \Longleftrightarrow OM=4$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $z\overline{z}=16$ est donc le cercle de centre O et de rayon 4.

3/ $|\mathrm{i}z-2|=9$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z, et A le point du plan complexe d'affixe $(-2\mathrm{i})$. On a : $|\mathrm{i}z-2|=9 \Longleftrightarrow |\mathrm{i}|\times|z+2\mathrm{i}|=9 \Longleftrightarrow AM=9$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|\mathrm{i}z-2|=9$ est donc le cercle de centre A et de rayon 9.

4/ $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$

Notons M le point du plan complexe d'affixe z, A et B les points du plan complexe d'affixes respectives i et $(-\mathrm{i})$. On a : $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}| \Longleftrightarrow AM=BM$.

Conclusion. L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et B : c'est donc la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 2. — (Identité du parallélogramme). Montrer que :

$$\forall\ (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$$

Corrigé en classe.

Exercice 3. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z+1|=|z|+1$

Soit z un complexe. Observons que : $|z+1|=|z|+1 \Longleftrightarrow |z+1|^2=(|z|+1)^2$ (puisque les deux termes de la première égalité sont des réels positifs.

Posons à présent : $z=a+\mathrm{i}b$ (avec a et b réels).

On a d'une part : $|z+1|^2=|a+1+\mathrm{i}b|^2=(a+1)^2+b^2=a^2+2a+1+b^2$.

D'autre part : $(|z|+1)^2=a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+1$.

On en déduit que : $|z+1|=|z|+1 \Longleftrightarrow a=\sqrt{a^2+b^2}$.

Cette dernière condition implique que a est positif, et que $b=0$.

En résumé, pour un nombre complexe z, on a montré l'implication : $|z+1|=|z|+1 \Longrightarrow z\in\mathbb{R}_+$.

L'implication réciproque est clairement vraie.

Conclusion. $(|z+1|=|z|+1) \Longleftrightarrow (z$ est un réel positif ou nul$)$

Exercice 4. — (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Soient z et z' deux complexes, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$[\ |z+z'| = |z| + |z'|\ ] \Longleftrightarrow [\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z\ ]$$

Avec les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \left|1 + \frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} + 1$$

Posons $Z = \dfrac{|z'|}{|z|}$. On a donc :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow |Z+1| = |Z| + 1$$

D'après l'exercice précédent, on en déduit que :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ Z = \lambda \qquad \text{d'où :} \qquad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z$$

On a ainsi prouvé l'implication :

$$[\ |z+z'| = |z| + |z'|\ ] \Longrightarrow [\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z\ ]$$

La réciproque est une formalité.

Conclusion. $[\ |z+z'| = |z| + |z'|\ ] \Longleftrightarrow [\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z\ ]$

Nombres complexes de module 1

Exercice 5. — Soit θ un réel de $[0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.

Grâce à la technique de l'angle-moitié, on a : $z = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$.

Si $\cos(\theta/2) \geqslant 0$, alors : $|z| = 2\cos(\theta/2)$ et $\arg(z) = \theta/2\ [2\pi]$.

Sinon, on a $\cos(\theta/2) < 0$, et on réécrit alors : $z = -2\cos(\theta/2)e^{i(\pi+\theta/2)}$. Dans ce cas :

$$|z| = -2\cos(\theta/2) \text{ et } \arg(z) = \pi + \theta/2\ [2\pi].$$

Exercice 6. — Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Démontrer que : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. On a :

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2)\,\overline{z_1 z_2}}{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = z_1\overline{z_2} + 2 + \overline{z_1} z_2$$

Finalement : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = 2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$. D'où : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Or z_1 et $\overline{z_2}$ sont de module 1, donc leur produit également. Ceci implique que : $|\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})| \leqslant 1$, et il s'ensuit que $2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$.

Conclusion. $\forall\,(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2,\ \dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+$

Exercice 7. — Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Corrigé en classe. **Conclusion.**

Argument, forme trigonométrique, forme exponentielle

Exercice 8. — Déterminer les formes exponentielles des complexes $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{3}-\mathrm{i}$, $z_3 = -2-2\mathrm{i}$, $z_4 = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_5 = \pi - 4$.

La correction détaillé a été faite en classe. On a :

$$z_1 = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\,; \quad z_2 = \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\,; \quad z_3 = -2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}\,;$$

$$z_4 = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\,; \quad z_5 = \pi - 4 = (4-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}.$$

Exercice 9. — Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_1 = (1-i)^8$, celle de $z_2 = (2+2i)^4$, puis celle de $z_3 = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

1/ On a : $1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. D'où : $(1-i)^8 = \sqrt{2}^8\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi/4} = 2^4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}$. Finalement : $(1-i)^8 = 16$.

2/ On a : $2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 2^{5/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. D'où : $(2+2\mathrm{i})^4 = \left(2^{5/2}\right)^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 2^{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$.

Finalement : $(2+2\mathrm{i})^4 = -1024$.

3/ On a : $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. D'où : $\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{2021\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{6\times 336\mathrm{i}\frac{\pi}{3}+5\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Finalement : $\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 10. — Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que (exceptionnellement, une solution graphique conviendra parfaitement) :

1/ $\arg(z) = 0 \ (mod.\ 2\pi)$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathbb{R}_+^*$.

2/ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \ (mod.\ 2\pi)$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+^*$.

3/ $\arg(z) = 0 \ (mod.\ \pi)$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*$.

4/ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ (mod.\ 2\pi)$

C'est l'ensemble des points du plan image des $z \in \mathbb{C}^*$ ayant des parties réelles et imaginaires égales.

Applications des formules d'Euler et de Moivre

Exercice 11. — Linéariser $\sin^4(\theta)$; $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$; $\cos^5(\theta)$; $\sin^3(\theta)\cos^3(\theta)$.

1/ Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Il s'ensuit que :

$$\sin^4(\theta) = \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^4}{(2i)^4} = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

Donc :

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta) - 8\cos(2\theta) + 6\right)$$

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \sin^4(\theta) = \dfrac{1}{8}\ \cos(4\theta) - \dfrac{1}{2}\ \cos(2\theta) + \dfrac{3}{4}$

2/ Pour tout réel θ, on a : $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \sin^2(\theta) - \sin^4(\theta)$. Or : $\sin^2(\theta) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2\theta)}{2}$ (formulaire de trigo).

On conclut grâce à cette observation et au calcul précédent.

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = -\dfrac{1}{8}\ \cos(4\theta) - \dfrac{1}{4}$

3/ Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^5(\theta) = \frac{1}{32}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^5$$

Il s'ensuit que :

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\right) = \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta) + 10\cos(3\theta) + 20\cos(\theta)\right)$$

Conclusion. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos^5(\theta) = \dfrac{1}{16}\ \cos(5\theta) + \dfrac{5}{16}\ \cos(3\theta)\dfrac{5}{8}\ \cos(\theta)$.

4/ Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta)\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\ \sin(2\theta)$. On est ainsi ramenés à la linéarisation de $\sin^3$, détaillée à la fin des questions de cours de la colle 3.

Exercice 12. — Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]^4\right)$.

Par suite : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left([\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)]^4\right) \qquad (\spadesuit)$.

Or :

$$[\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4\mathrm{i}\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4\mathrm{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))^2$$

Conclusion. $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$

Exercice 13. — Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\sin(3\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]^3\right)$.

Par suite : $\sin(3\theta) = \mathrm{Im}\left([\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)]^3\right) \qquad (\spadesuit)$.

Or :

$$[\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)]^3 = \cos^3(\theta) + 3\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \mathrm{i}\sin^3(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$$

Conclusion. $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

Exercice 14. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \left]0; 2\pi\right[$. Calculer la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Pour tout réel θ, on a : $\cos^2(k\theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2\theta)}{2}$.

Par suite :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} 1 + \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta)\right] = \frac{1}{2}\left[(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta)\right] \qquad (\bigstar)$$

Soient k un entier naturel et θ un réel de $\left]0; 2\pi\right[$, différent de π. On a : $\cos(2k\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta}\right)$.

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta}\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta}\right)$$

En posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta}, \text{ on a : } \boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \mathrm{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)}$$

Or : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right)^k$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien [*], puisque $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \neq 1$, selon l'hypothèse faite sur θ un peu plus haut.

Ainsi :

$S_n = \dfrac{1 - \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \Longleftrightarrow S_n = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \Longleftrightarrow S_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}$ *(technique de "l'angle-moitié")*

$$\Longleftrightarrow S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta)} \frac{-2\mathrm{i}\sin((n+1)\,\theta)}{-2\mathrm{i}\sin(\theta)} \text{ d'où finalement : } \boxed{S_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta)} \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)} \quad (\heartsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta)\,\frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}$$

Finalement, dans ce cas : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left[(n+1) + \cos(n\theta)\,\frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}\right]$

---

*. $\forall\, q \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice 15. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

Soient θ un réel, et n un entier naturel.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^n\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta/2} \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Exercice 16. — **(Valeur exacte de** $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$**).**

1/ **Délinéarisation.** Soit θ un nombre réel. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

2/ On pose $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a, b et c, que l'on explicitera, tels que :
$$a\,\omega^5 + b\,\omega^3 + c\,\omega = 0$$

3/ On considère à présent l'équation (E) : $\quad aX^5 + bX^3 + cX = 0$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). On vérifiera en particulier que (E) possède deux solutions non nulles strictement positives, et deux solutions non nulles strictement négatives.

b/ On note X_1 et X_2 les solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$. Justifier que : $X_1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4/ A l'aide des questions précédentes, préciser la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Corrigé

1/ Soit θ un réel. On a : $\cos(5\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^5\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^5\right)$. Or :

$(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^5 = \cos^5(\theta) + 5\mathrm{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10\mathrm{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + \mathrm{i}\,\sin^5(\theta)$

Donc, en extrayant la partie réelle de l'expression précédente † :

$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right) + 5\cos(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2$

$$= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta) + 10\cos^5(\theta) + 5\cos(\theta) - 10\cos^3(\theta) + 5\cos^5(\theta)$$

Conclusion. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$.

2/ En donnant à θ la valeur $\pi/10$ dans la relation que l'on vient d'établir, on obtient :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

En notant $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, on a donc : $\boxed{16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega = 0}$.

†. Et en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie pour écrire $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

3/ a/ Soit X un réel. On a :

$$[X \text{ est solution de (E)}] \Longleftrightarrow [16X^5 - 20X^3 + 5X = 0] \Longleftrightarrow [X = 0 \ \vee 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0]$$

Dans la seconde équation, on pose $Y = X^2$. L'équation se réécrit alors : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Cette équation du second degré à coefficients réels possède un discriminant strictement positif : $\Delta = 80$. On en déduit qu'elle possède deux solutions : $Y_{+,-} = \dfrac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32}$, soit encore : $Y_{+,-} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.

Après avoir observé que ces deux solutions sont réelles positives, on peut conclure, en revenant à la variable initiale, que **l'équation** $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$ **possède exactement 4 solutions réelles :**

$$\boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{et } -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$

On en déduit que **l'équation (E) possède exactement 5 solutions réelles :**

$$\boxed{0, \quad \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \quad -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{et } -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$

b/ L'énoncé suggère de poser : $X_1 = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. On a : $X_1^2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$, et $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{6}{8}$.

Puisque $5 - \sqrt{5} < 6$ [‡], on en déduit que : $\boxed{\underbrace{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}_{=X_1} < \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

4/ D'après les questions 2 et 3-a, ω est une des 5 solutions de l'équation (E). Trois de ces solutions sont négatives ou nulles. Dans le même temps, on peut affirmer que $\omega > 0$, puisque : $\dfrac{\pi}{10} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

La valeur exacte de ω est donc X_1 ou X_2. Pour trancher, on observe que : $0 < \dfrac{\pi}{10} < \dfrac{\pi}{6}$. Donc : $\omega = \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que : $\omega > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la question 3-b, ceci implique que $\omega = X_2$.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

‡. Waouh !!!

Exercice 17. — Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^{n}\left[\binom{2n}{2p}(-1)^p\cos^{2(n-p)}(\theta)\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^j\cos^{2j}(\theta)\right]$$

Soient n un entier naturel, et θ un réel. On a : $\cos(2n\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2n\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right]$ $(\spadesuit)$.

D'après la formule du binôme de Newton : $(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{i}^k\sin^k(\theta)\cos^{2n-k}(\theta)$

On peut alors judicieusement observer que i^k est un réel si et seulement si k est pair pour affirmer que :

$$\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0,\,k\text{ pair}}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{i}^k\sin^k(\theta)\cos^{2n-k}(\theta)$$

Par suite : $\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\mathrm{i}^{2k}\sin^{2k}(\theta)\cos^{2(n-k)}(\theta)$

D'où : $\mathrm{Re}\left[(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k\cos^{2(n-k)}(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^k$

Une ultime application de la formule du binôme de Newton permet de conclure avec $(\spadesuit)$ que :

$$\boxed{\cos(2n\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n}{2k}(-1)^k\cos^{2(n-k)}(\theta)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\cos^{2j}(\theta)\right]}$$

Exercice 18. — **(Linéarisation de $\cos^{2n}(\theta)$).**
Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que : $$\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(n-k)\theta}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on a : $\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-k)\theta} = \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{2n-k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-k)\theta}$.

Cette observation faite, on procède au changement d'indice : $K = 2n-k$. Lorsque k varie de $(n+1)$ à $2n$, K prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n-1$. On en déduit que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-k)\theta} = \sum_{K=0}^{n-1}\binom{2n}{K}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-2n+K)\theta} = \sum_{K=0}^{n-1}\binom{2n}{K}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(n-K)\theta}$$

D'où : $\boxed{\textbf{Conclusion. } \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(n-k)\theta}}$ **.Conclusion.**

2/ Montrer que : $$\cos^{2n}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\cos\left(2\left(n-k\right)\theta\right)\right)$$

On a : $\cos^{2n}(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n}$ $(\spadesuit)$

D'après la formule du binôme de Newton : $\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i(2n-k)\theta}e^{-ik\theta} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta}$ $(\clubsuit)$

On décompose cette somme en "trois morceaux" :

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta}$$

D'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}e^{-2i(n-k)\theta}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} = \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\left(e^{2i(n-k)\theta}+e^{-2i(n-k)\theta}\right)$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{2i(n-k)\theta} = \binom{2n}{n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\cos\left(2\left(n-k\right)\theta\right)$ $(\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on a : $\boxed{\cos^{2n}(\theta) = \dfrac{1}{2^{2n}}\left(\dbinom{2n}{n} + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dbinom{2n}{k}\cos\left(2\left(n-k\right)\theta\right)\right)}$

Exponentielle complexe

Exercice 19. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1/ $\exp(z) = 1+i$ 2/ $\exp(z) = 2i-2$; 3/ $\exp(z) = 3\sqrt{3}-3i$; 4/ $\exp(z) = -6$

Selon le cours, si $Z \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a : $e^z = Z \iff z = \ln|Z| + i\arg(Z)\ [2i\pi]$.

On applique ce résultat à chacune des équations de l'énoncé.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\exp(z) = 1+i \iff \exp(z) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \iff z = \dfrac{1}{2}\ln(2) + i\dfrac{\pi}{4}\ [2i\pi]$.

2/ Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\exp(z) = 2i-2 \iff \exp(z) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} \iff z = \dfrac{3}{2}\ln(2) + 3i\dfrac{\pi}{4}\ [2i\pi]$.

3/ Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\exp(z) = 3\sqrt{3}-3i \iff \exp(z) = 6e^{-i\pi/6} \iff z = \ln(6) - i\dfrac{\pi}{6}\ [2i\pi]$.

4/ Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\exp(z) = -6 \iff \exp(z) = 6e^{i\pi} \iff z = \ln(6) + i\pi\ [2i\pi]$.

Exercice 20. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\qquad e^{2z} - e^{z} - 6 = 0.$

Soit z un nombre complexe, tel que $e^{2z} - e^{z} - 6 = 0$.

On pose $X = e^{z}$. L'équation s'écrit alors : $X^2 - X - 6 = 0$. Cette dernière possède deux racines réelles : 3 et -2.

En revenant à la variable initiale, on en déduit que z est solution de (E) si et seulement si :

$$e^{z} = 3 \qquad \text{ou} \qquad e^{z} = -2$$

Or : $e^{z} = 3 \iff z = \ln(3)\ [2i\pi]$ et $e^{z} = -2 \iff z = \ln(2) + i\pi\ [2i\pi]$.

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left[e^{2z} - e^{z} - 6 = 0\right] \iff \left[z = \ln(3)\ [2i\pi] \quad \text{ou} \quad z = \ln(2) + i\pi\ [2i\pi]\right]$

Exercice 21. — A l'aide de la fonction exponentielle complexe, on peut définir la fonction **cosinus complexe** notée COS en posant :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{COS}\,(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

1/ Montrer que la fonction COS est paire ; puis établir que la fonction COS est périodique, de période 2π.

On observe que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ (-z) \in \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ est donc symétrique par rapport à zéro.

De plus : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{COS}\,(-z) = \dfrac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \mathrm{COS}\,(z)$. On en déduit que la fonction COS est paire.

Enfin : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{COS}\,(z + 2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = e^{2i\pi}\mathrm{COS}\,(z) = \mathrm{COS}\,(z)$. On en déduit que la fonction COS est 2π-périodique.

Conclusion. La fonction COS est paire et 2π-périodique.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{COS}(z) = 0$.

Soit z un complexe. On a : $\mathrm{COS}(z) = 0 \iff \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0$

$$\iff e^{2iz} = -1 \iff e^{2iz} = e^{i\pi} \iff 2iz = i\pi\ [2i\pi] \iff z = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Conclusion. $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{COS}(z) = 0 \iff z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Racines carrées d'un nombre complexe, équations du second degré

Exercice 22. — Calculer les racines carrées des complexes :

$$1/\ z_1 = -i\,; \quad 2/\ z_2 = 2 + 2i\,; \quad 3/\ z_3 = \sqrt{3} + i\,; \quad 4/\ z_4 = -4i\,; \quad 5/\ z_5 = 3 - 3i$$

1/ $z_1 = -1 = e^{i\pi}$. Les racines carrées de z_1 sont donc : $\pm e^{i\pi/2} = \pm i$.

2/ $z_2 = 2 + 2i = 2^{3/2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de z_2 sont donc : $\pm 2^{3/4}e^{i\pi/8}$.

3/ $z_3 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$. Les racines carrées de z_3 sont donc : $\pm 2^{1/2}e^{i\pi/12}$.

4/ $z_4 = -4i = 4e^{-i\pi/2}$. Les racines carrées de z_4 sont donc : $\pm 2e^{-i\pi/4}$.

5/ $z_5 = 3 - 3\mathrm{i} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Les racines carrées de z_5 sont donc : $\pm 3^{1/2}2^{1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$.

Exercice 23. — Calculer les racines carrées de $Z = \dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ en utilisant :

1/ la forme algébrique de Z ; 2/ la forme trigonométrique de Z

1/ D'une part : $Z = \dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)} = \dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Les racines carrées de Z sont donc : $\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

2/ D'autre part : $Z = \dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Les racines carrées de Z sont donc : $\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 24. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $3 + 4\mathrm{i}$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 3+4\mathrm{i} \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 3 + 4\mathrm{i} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 5 & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième ligne que $a = \pm 2$ et $b = \pm 1$. La seconde $(2ab = 4)$ signifie que a et b sont de même signe, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ sont $\pm(2+\mathrm{i})$.

Exercice 25. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $2 + 4\mathrm{i}$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 2+4\mathrm{i} \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 2 + 4\mathrm{i} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième ligne que $a = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$ et $b = \pm\sqrt{\sqrt{5}-1}$. La seconde $(2ab = 4)$ signifie que a et b sont de même signe, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $2 + 4\mathrm{i}$ sont $\pm\left(\sqrt{1+\sqrt{5}} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)$.

EXERCICE 26. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x+y &= 2 \\ xy &= 2 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x+y &= 1+\mathrm{i} \\ xy &= 13\mathrm{i} \end{cases}$$

1/ Un couple de complexes (x, y) est solution de (S_1) si et seulement si x et y sont les deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, en ayant posé $S = x + y$ et $P = xy$. Dans le cas présent, cette équation s'écrit : $X^2 - 2X + 2 = 0$, et ses racines sont $1 \pm \mathrm{i}$.

Conclusion. Le système (S_1) admet exactement deux couples solutions : $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ et $(1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$.

2/ Un couple de complexes (x, y) est solution de (S_2) si et seulement si x et y sont les deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, en ayant posé $S = x + y$ et $P = xy$. Dans le cas présent, cette équation s'écrit : $X^2 - (1+\mathrm{i})X + 13\mathrm{i} = 0$.

Contrairement au cas précédent, la résolution mérite d'être détaillée : le discriminant est $\Delta = -50\mathrm{i}$. L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{1+\mathrm{i} \pm 5\underbrace{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}_{=1-\mathrm{i}}}{2} = \frac{1+\mathrm{i} \pm 5\,(1-\mathrm{i})}{2} = 3 - 2\mathrm{i} \text{ ou } -2+3\mathrm{i}$$

Conclusion. Le système (S_2) admet exactement deux couples solutions : $(3-2\mathrm{i}, -2+3\mathrm{i})$ et $(-2+3\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i})$.

EXERCICE 27. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1/ $z^2 + 2z + i = 0$

Cette équation du 2^{nd} degré a pour discriminant : $\Delta = 4\,(1-\mathrm{i}) = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = 2^{5/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \left(2^{5/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}\right)^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{-2 \pm 2^{5/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}}{2} = -1 \pm 2^{1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$$

Conclusion. $z^2 + 2z + i = 0 \Longleftrightarrow -1 \pm 2^{1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$

2/ $z^2 + 3z + 3 - i = 0$

Cette équation du 2^{nd} degré a pour discriminant : $\Delta = -3 + 4\mathrm{i} = (1+2\mathrm{i})^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\frac{-3 \pm (1+2\mathrm{i})}{2} = -1+\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad -2-\mathrm{i}$$

Conclusion. $z^2 + 3z + 3 - \mathrm{i} = 0 \Longleftrightarrow z \in \{-1+\mathrm{i}, -2-\mathrm{i}\}$

3/ $z^2 - 2z + 2 + i = 0$

Cette équation du 2^{nd} degré a pour discriminant : $\Delta = -4 - 4\mathrm{i} = 2^{5/2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4} = \left(2^{5/4}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/8}\right)^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$1 \pm 2^{1/4}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/8}$$

Conclusion. $z^2+3z+3-\mathrm{i}=0 \Longleftrightarrow z\in\left\{1\pm 2^{1/4}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/8}\right\}$

4/ $z^2-2iz+1=0$

Cette équation du 2^{nd} degré a pour discriminant : $\Delta=-8=\left(2^{3/2}\mathrm{i}\right)^2$

L'équation possède donc exactement deux solutions :

$$\mathrm{i}\pm 2^{1/2}\mathrm{i}$$

Conclusion. $z^2+3z+3-\mathrm{i}=0 \Longleftrightarrow z\in\left\{(1+\sqrt{2})\mathrm{i},(1-\sqrt{2})\mathrm{i}\right\}$