Exercices 4 – Nombres Complexes

Modules

Exercice 1. — (Modules et lieux géométriques). Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que :

1) $|z-1|=2$ | 2) $z\overline{z}=16$ | 3) $|\mathrm{i}z-2|=9$ | 4) $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$

Exercice 2. — (Identité du parallélogramme). Montrer que :

$$\forall\ (z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$$

Exercice 3. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z+1|=|z|+1$

Exercice 4. — (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Soient z et z' deux complexes, avec $z\neq 0$. Montrer que :

$$[\ |z+z'|=|z|+|z'|\ ]\iff[\ \exists\,\lambda\in\mathbb{R}_+,\ z'=\lambda z\ ]$$

Nombres complexes de module 1

Exercice 5. — Soit θ un réel de $[0,\pi[$. Déterminer le module et un argument de $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exercice 6. — Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Démontrer que : $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul.

Exercice 7. — Soit $z\in\mathbb{C}$, avec $|z|=1$ et $z\neq 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Argument, forme trigonométrique, forme exponentielle

Exercice 8. — Déterminer les formes exponentielles des complexes $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, $z_3=-2-2\mathrm{i}$, $z_4=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_5=\pi-4$.

Exercice 9. — Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_1=(1-i)^8$, celle de $z_2=(2+2i)^4$, puis celle de $z_3=\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

Exercice 10. — Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que (exceptionnellement, une solution graphique conviendra parfaitement) :

1/ $\arg(z)=0\ (\textit{mod. } 2\pi)$

2/ $\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}\ (\textit{mod. } 2\pi)$

3/ $\arg(z)=0\ (\textit{mod. } \pi)$

4/ $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}\ (\textit{mod. } 2\pi)$

Applications des formules d'Euler et de Moivre

Exercice 11. — Linéariser $\sin^4(\theta)$; $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$; $\cos^5(\theta)$; $\sin^3(\theta)\cos^3(\theta)$.

Exercice 12. — Exprimer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Exercice 13. — Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 14. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \left]0; 2\pi\right[$. Calculer la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Exercice 15. — Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

Exercice 16. — **(Valeur exacte de** $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$**).**

1/ **Délinéarisation**. Soit θ un nombre réel. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

2/ On pose $\omega = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. A l'aide de la question précédente, établir qu'il existe trois entiers a, b et c, que l'on explicitera, tels que :

$$a\,\omega^5 + b\,\omega^3 + c\,\omega = 0$$

3/ On considère à présent l'équation (E) : $aX^5 + bX^3 + cX = 0$.

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). On vérifiera en particulier que (E) possède deux solutions non nulles strictement positives, et deux solutions non nulles strictement négatives.

b/ On note X_1 et X_2 les solutions strictement positives de l'équation (E), de telle sorte que $X_1 < X_2$. Justifier que : $X_1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4/ A l'aide des questions précédentes, préciser la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 17. — Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\cos(2n\theta) = \sum_{p=0}^{n} \left[\binom{2n}{2p} (-1)^p \cos^{2(n-p)}(\theta) \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-1)^j \cos^{2j}(\theta) \right]$$

Exercice 18. — **(Linéarisation de** $\cos^{2n}(\theta)$**).**
Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que : $$\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(n-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} e^{-2i(n-k)\theta}$$

2/ Montrer que : $$\cos^{2n}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n}{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)\theta) \right)$$