COLLE 4 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N^{0}1 — **Propriété** : soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = nx^{n-1}$

Soit x un réel arbitraire.

➤ 1er cas : $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$ Soit h un réel non nul. On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} = \frac{x^n + nhx^{n-1} + \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h}$$

Ainsi : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{nhx^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}}{h}$. D'où : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}$

Pour tout entier $k \in [\![2, n]\!]$, on a : $\displaystyle\lim_{h\to 0} h^{k-1} = 0$. D'où : $\forall\, k \in [\![2, n]\!],\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} = 0$. *

Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} = 0$. Finalement : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$.

Cette limite étant finie (c'est un nombre réel), on en déduit que f est dérivable en x, et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on peut conclure : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = nx^{n-1}$.

➤ 2ème cas : $n = 1$. Dans ce cas : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$. Alors :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \qquad \text{D'où : } \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1$$

Cette limite étant finie, on en déduit que f est dérivable en x, et que $f'(x) = 1$.

Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on peut conclure : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 = 1 \times x^{1-1}$.

Conclusion. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^n$.
La fonction f est dérivable en tout réel x, et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = nx^{n-1}$

QUESTION DE COURS N^{0}4 — **Grand classique**. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ (♠)

Par ailleurs : $\forall\, h > -1,\ \ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

En posant $h = 1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), le réel h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et il s'ensuit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

D'où pour tout entier naturel n non nul : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ (♡). On déduit de (♠) et (♡) que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}}$.

*. Puisque h^{k-1} tend vers 0 lorsque h tend vers 0, et que $\binom{n}{k}$ et x^{n-k} ne dépendent pas de h.

Question de cours n^{0}2 — **Propriété** : soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a, alors (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

f et g étant dérivables en a, elles admettent un DL1 en a. Pour tout réel h (tel que $(a+h) \in I$) on a donc :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \quad \text{et } g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

D'où pour tout h (tque $(a+h) \in I$) : $(fg)(a+h) = [f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)] \times [g(a) + hg'(a) + h\varepsilon_2(h)]$

Ainsi : $(fg)(a+h) = f(a)g(a) + hf(a)g'(a) + hf(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g(a) + h^2f'(a)g'(a)$
$+h^2f'(a)\varepsilon_2(h) + hg(a)\varepsilon_1(h) + h^2g'(a)\varepsilon_1(h) + h^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$

D'où : $(fg)(a+h) = (fg)(a) + h\left(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right) + h\varepsilon_3(h) \qquad (\spadesuit)$

(en ayant posé : $\varepsilon_3(h) = f(a)\varepsilon_2(h) + hf'(a)g'(a) + hf'(a)\varepsilon_2(h) + g(a)\varepsilon_1(h) + hg'(a)\varepsilon_1(h) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)$)

Puisque qu'il est clair que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$, on en déduit que la fonction (fg) admet un DL1 en a. A ce titre, elle est dérivable en a, et on déduit de $(\spadesuit)$ que : $\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).}$

Question de cours n^{0}3 — **Théorème** : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie au voisinage de zéro tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Càd : **f est dérivable en a SSI f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a**.

On raisonne par double implication pour établir l'équivalence de l'énoncé.

➤ **Sens direct** : supposons f dérivable en a. On écrit (diaboliquement), pour tout réel h (tque $(a+h) \in I$) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + f(a+h) - f(a) - hf'(a)\ ^{\dagger}$$

D'où : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right)$ d'où : $\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\ (\spadesuit)}$

en ayant posé : $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$.

Or, f étant dérivable en a, on a : $\lim_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et donc $\lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. En résumé :

$$[f \text{ est dérivable en } a] \Longrightarrow \left[\forall h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0\right] \qquad (\heartsuit)$$

➤ **Réciproquement** : supposons qu'il existe un réel ℓ tel que : $f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Alors pour tout réel h non nul tel que $(a+h) \in I$, on a : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell + \varepsilon(h)$.

D'où : $\lim_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$. Donc la fonction f est dérivable en a (et $f'(a) = \ell$). Ce qui assure que :

$$\left[\forall h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0\right] \Longrightarrow [f \text{ est dérivable en } a] \qquad (\clubsuit)$$

Conclusion. f est dérivable en a SSI il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tque :

$$\forall h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

†. Une version sophistiquée de la "méthode du $+1-1$".

Banque d'exercices

Exercice 1. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$; puis l'équation $\mathrm{ch}(x) = -2$.

Exercice 2. — Linéarisation de $\mathrm{ch}^4(x)$ pour tout réel x.

Exercice 3. — Etablir que pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx} = 2^n \mathrm{e}^{nx/2} \mathrm{ch}^n \left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 4. — Prouver que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sin(x) \leqslant x$

Exercice 5. — Calcul de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 6. — Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

Exercice 7. — Calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}$

Exercice 7. — Calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\tan(h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\sin(h)}$

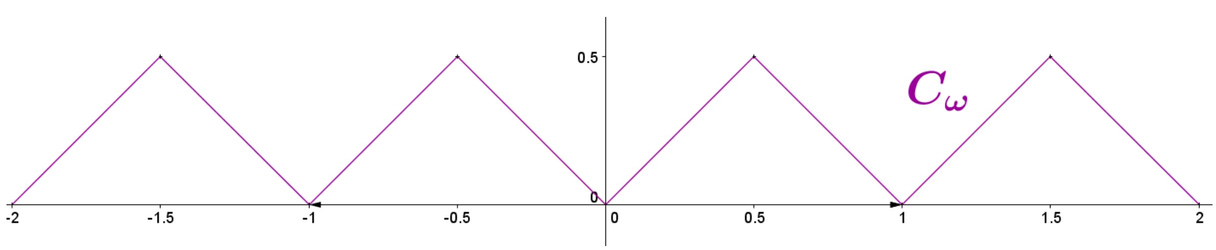
Exercice 7. — Calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h) + 1 - \sqrt{1+h}}{\mathrm{sh}(h)}$

Exercice 8. — **A l'attention de celles et ceux qui pensent que continue implique dérivable.**
On considère les deux assertions logiques suivantes :

P : "On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille"

Q : "On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille, **et** caresser la courbe de ω sans se piquer"

Une seule des deux implications $P \Longrightarrow Q$ ou $Q \Longrightarrow P$ est vraie : laquelle ?



Exercice 9. — **Attention ! Cet exercice ne peut être posé qu'aux candidats Belges**

A l'aide de la règle de l'Hospital (ou pas...), calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n$$

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}(x) = 2$; puis l'équation $\text{ch}(x) = -2$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2} = 2 \iff \text{e}^x + \text{e}^{-x} = 4 \iff \text{e}^x - 4 + \text{e}^{-x} = 0 \iff \text{e}^{2x} - 4\text{e}^x + 1 = 0$$

Posons : $X = \text{e}^x$. L'équation se réécrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$. C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. Elle possède donc exactement deux racines réelles :

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{càd} \qquad 2 \pm \sqrt{3}$$

Par suite :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff \text{e}^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Après avoir observé que $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont des réels strictement positifs (ces affirmations pourront être admises), on peut conclure :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

L'équation $\text{ch}(x) = -2$ est beaucoup plus rapide à résoudre : en effet, la fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$, et l'équation ne possède donc aucune solution réelle.

Exercice 2. — Linéarisation de $\text{ch}^4(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x on a :

$$\text{ch}^4(x) = \left(\frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\text{e}^{4x} + 4\text{e}^{2x} + 6 + 4\text{e}^{-2x} + \text{e}^{-4x}\right) = \frac{1}{16}\left(2\text{ch}(4x) + 8\text{ch}(2x) + 6\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) = \dfrac{\text{ch}(4x)}{8} + \dfrac{\text{ch}(2x)}{2} + \dfrac{3}{8}$

Exercice 3. — Etablir que pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{e}^{kx} = 2^n \text{e}^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Soient x un réel et n un entier naturel. Selon la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{e}^{kx} = (1 + \text{e}^x)^n = \left[\text{e}^{x/2}\left(\text{e}^{-x/2} + \text{e}^{x/2}\right)\right]^n = \left[\text{e}^{x/2} 2\text{ch}(x/2)\right]^n = 2^n \text{e}^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Conclusion. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{e}^{kx} = 2^n \text{e}^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 4. — Prouver que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sin(x) \leqslant x$

Pour tout réel x, posons $f(x) = \sin(x) - x$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x) - 1$.

La fonction cos étant majorée par 1, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}$; la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en outre $f(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) - x \leqslant 0$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leqslant x$

Exercice 5. — Calcul de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Selon le cours : $\forall h \in \mathbb{R},\ \sin(h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Posons : $h = \frac{1}{n}$. On peut aisément observer que h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On déduit de ce qui précède que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0}$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n + n\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ D'où : $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$
- $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ D'où : $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$
- $\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ D'où : $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Exercice 6. — Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

Selon le cours, on a pour tout réel $h \in]-1,1[$: $\sqrt{1+h} = 1+\frac{h}{2}+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ (♠)

Par ailleurs, pour tout réel $x>0$, on a :

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$ (♣)

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a : $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ‡

On déduit de cette formule et de (♣) que pour tout réel $x>0$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\
\iff\ &\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\\
\iff\ &\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=0$

Exercice 7. — Calcul de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)+1-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h\in]-1,1[$:

- $\sin(h) = h + h\varepsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$
- $\sqrt{1+h} = 1+\frac{h}{2}+h\varepsilon_2(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0$
- $\ln(1+h) = h+h\varepsilon_3(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_3(h)=0$

On en déduit que pour tout réel $h\in]-1,1[$:

$$\frac{\sin(h)+1-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} = \frac{h+h\varepsilon_1(h)+1-1-\frac{h}{2}-h\varepsilon_2(h)}{h+h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2}+h\left(\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)\right)}{h+h\varepsilon_3(h)}$$

D'où : $\dfrac{\sin(h)+1-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} = \dfrac{\frac{1}{2}+\left(\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)\right)}{1+\varepsilon_3(h)}$ Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)+1-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}=\dfrac{1}{2}$

‡. Il suffit de poser $h=\frac{1}{x}$ dans la formule (♠).

Exercice 7. — Calcul de $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)+1-\sqrt{1+h}}{\sin(h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h \in]-1,1[$:

- $\tan(h) = h + h\varepsilon_1(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$
- $\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{h}{2} + h\varepsilon_2(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$
- $\sin(h) = h + h\varepsilon_3(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$

On en déduit que pour tout réel $h \in]-1,1[$:

$$\frac{\tan(h)+1-\sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \frac{h + h\varepsilon_1(h) + 1 - 1 - \frac{h}{2} - h\varepsilon_2(h)}{h + h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2} + h\left(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\right)}{h + h\varepsilon_3(h)}$$

D'où : $\dfrac{\tan(h)+1-\sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \dfrac{\frac{1}{2} + \left(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\right)}{1+\varepsilon_3(h)}$ Ainsi : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)+1-\sqrt{1+h}}{\sin(h)} = \frac{1}{2}$

Exercice 7. — Calcul de $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)+1-\sqrt{1+h}}{\operatorname{sh}(h)}$

Selon le cours, pour tout réel $h \in]-1,1[$:

- $\ln(1+h) = h + h\varepsilon_1(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$
- $\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{h}{2} + h\varepsilon_2(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$
- $\operatorname{sh}(h) = h + h\varepsilon_3(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$

On en déduit que pour tout réel $h \in]-1,1[$:

$$\frac{\ln(1+h)+1-\sqrt{1+h}}{\operatorname{sh}(h)} = \frac{h + h\varepsilon_1(h) + 1 - 1 - \frac{h}{2} - h\varepsilon_2(h)}{h + h\varepsilon_3(h)} = \frac{\frac{h}{2} + h\left(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\right)}{h + h\varepsilon_3(h)}$$

D'où : $\dfrac{\ln(1+h)+1-\sqrt{1+h}}{\operatorname{sh}(h)} = \dfrac{\frac{1}{2} + \left(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\right)}{1+\varepsilon_3(h)}$ Ainsi : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)+1-\sqrt{1+h}}{\operatorname{sh}(h)} = \frac{1}{2}$

Question - Bonus (hors-programme de la colle 4) A l'aide du formulaire donnant les DL1 usuels en zéro, combien de versions différentes de l'exo 7 pourriez-vous construire ?...

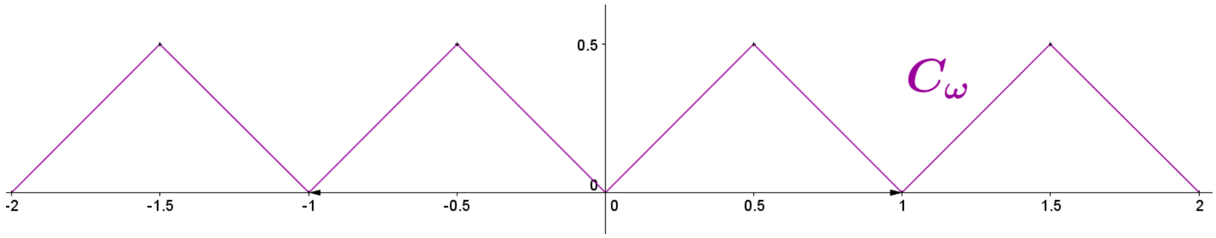
Les exos 8 et 9 ne sont pas sérieusement destinés à être posés en colle...

EXERCICE 8. — A l'attention de celles et ceux qui pensent que continue implique dérivable.
On considère les deux assertions logiques suivantes :

P : "On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille"

Q : "On peut tracer la courbe de ω sans lever le stylo de la feuille, **et** caresser la courbe de ω sans se piquer"

Une seule des deux implications $P \Longrightarrow Q$ ou $Q \Longrightarrow P$ est vraie : laquelle ?



Evidemment $Q \Longrightarrow P$ est vraie, et $P \Longrightarrow Q$ est fausse.

Retenez donc que :

DÉRIVABLE $\Longrightarrow$ CONTINUE

RÉCIPROQUE FAUSSE (contre-exemple avec la fonction valeur absolue)

EXERCICE 9. — ATTENTION ! Cet exercice ne peut être posé qu'aux candidats Belges 

A l'aide de la règle de l'Hospital (ou pas...), calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n$$

Réponse la semaine prochaine !