MPSI – Colle 4 (7 au 11 octobre 2024) : Fonctions à valeurs réelles

Chapitre 5 : Fonctions numériques

1 – Généralités

➤ Définition de fonction numérique f, de son ensemble de définition E. Notions d'image et d'antécédent.

➤ L'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(E)$ est $\{y \in F, \exists\, x \in E,\ f(x) = y\}$; c'est l'ensemble des valeurs de la fonctions, ou encore l'ensemble des éléments de f admettant au moins un antécédent par f.

➤ Opérations élémentaires sur les fonctions : définitions de $f+g$; $f \times g$ et f/g. Etant données deux fonctions $f \in F^E$ et $g \in G^F$, la **composée** de g et f, notée $g \circ f$ est la fonction notée $g \circ f$ de G^E définie en posant : $\forall\, x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Exemples. **Propriété** : la composition des fonctions est associative $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, mais n'est pas commutative.

L'**identité de** E est la fonction notée id_E qui associe à tout x dans E le même x. L'identité de E est l'élément neutre pour la composition dans E^E.

➤ Définition de fonction paire, impaire. Exemples. **Théorème** : toute fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2 – Valeur absolue

Définition : pour tout réel x, la valeur absolue de x est le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(-x, x)$.

Propriété : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$

Conséquence : pour un nombre réel, la valeur absolue coïncide avec le module. Ceci implique que la valeur absolue possède les mêmes propriétés, et notamment **l'inégalité triangulaire** : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$

Interprétation géométrique de la valeur absolue (cruciale pour la suite de cours de cette année) : $|x| = \mathrm{d}(x,0)$; $\mathrm{d}(x,a) = |x-a|$; $\mathrm{d}(x,a) = 0 \Longleftrightarrow x = a$. Interprétations géométriques et en termes d'intervalles de $|x-a| = \varepsilon$, $|x-a| \leqslant \varepsilon$, $|x-a| \geqslant \varepsilon$.

Lemme : une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

3 – Fonctions dérivables (rappels de T$^{\text{ale}}$ et un peu plus...)

Tout au long de ce paragraphe, f désignera une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et a un élément de I.

Définition : la fonction f est **dérivable** en a si la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ lorsque h tend vers 0 existe et est finie. Lorsque tel est le cas, on appelle **nombre dérivé de** f **en** a et on note $f'(a)$ cette limite. Ainsi, sous réserve d'existence et de finitude : $f'(a) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ou $f'(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

Exemples : en tout réel a, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable et $f'(a) = na^{n-1}$. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel non nul a, et $g'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$; elle n'est en revanche pas dérivable (*à droite*) en 0. La fonction $h : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Définition : lorsque la fonction f est dérivable en tout $a \in I$, on dit que la fonction f est **dérivable sur** I, et on note f' la dérivée de f.

Théorème : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Lorsque tel est le cas, on a : $\ell = f'(a)$. L'égalité du théorème se réécrit alors :

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Le terme de droite de l'égalité ci-dessus est alors appelé **développement limité à l'ordre** 1 **de** f **en** a ; l'expression $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a.

Exemples de DL1 en 0 : $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$; $\sin(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\tan(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\mathrm{sh}(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\mathrm{th}(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\mathrm{e}^h = 1 + h + h\varepsilon(h)$; $\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{1}{2}h + h\varepsilon(h)$; $\cos(h) = 1 + h\varepsilon(h)$; $\mathrm{ch}(h) = 1 + h\varepsilon(h)$.

Lien avec le cours de Physique : "pour des petites valeurs de θ, $\tan(\theta) = \theta$". Cette phrase doit être comprise "mathématiquement" comme $\tan(\theta) = \theta + \theta\varepsilon(\theta)$ avec $\lim\limits_{\theta \longrightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$. Ce qui signifie très grossièrement que lorsque θ est petit ("petit = proche de zéro"), on ne commet pas une grande erreur en remplaçant $\tan(\theta)$ par son approximation affine θ.

Opérations algébriques sur les dérivées : somme, produit, quotient (ce sont les formules que vous connaissez bien).

Théorème (dérivée d'une composée) : soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Soient encore $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ deux fonctions à valeurs réelles, avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

Applications : colonne de droite du formulaire des dérivées.

Remarque : on ne peut en revanche pas conclure à la non-dérivabilité de $g \circ f$ si l'une des deux fonctions f ou g n'est pas dérivable. Explicitement, notons g la fonction racine carrée (non dérivable en 0), f_1 la fonction $x \longmapsto x^2$, et f_2 la fonction $x \longmapsto x^4$.
Dans ce cas $g \circ f_1$ (*resp.* $g \circ f_2$) est la fonction valeur absolue (*resp.* la fonction carrée). Ainsi $g \circ f_1$ n'est pas dérivable en 0, tandis que $g \circ f_2$ est dérivable en 0.

Questions de cours

- **Propriété** : soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = nx^{n-1}$.

- **Propriété** : si f et g sont dérivables en a, alors (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- **Théorème** : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε telle que :
$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- **Grand classique** : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Objectifs / Questions-types :

- Au regard des innombrables services qu'elle nous rendra en Analyse cette année, continuer de ne pas oublier l'**inégalité triangulaire**.

- Savoir **étudier la parité** d'une fonction. **Exemple** : montrer que la fonction $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

- Connaître les propriétés des fonctions usuelles de Terminale (expo, ln, sin, cos, etc...), ainsi que celles des nouvelles fonctions usuelles (ch et sh). **Exemple** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.

- Savoir **calculer une dérivée** : en utilisant le formulaire des dérivées usuelles ; les règles de calculs sur la dérivée d'un produit, d'une composée etc ; ou en revenant à la définition.

- Connaître et savoir utiliser les **développements limités à l'ordre 1** des fonctions usuelles, pour lever une indétermination dans un calcul de limite. **Exemple** : calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}$

- Utiliser le lien entre signe de f' et sens de variation de f pour établir une inégalité. **Exemple** : montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leqslant x$.