Problème de la semaine 2 — Corrigé

Exercice 1 — (Equation fonctionnelle)

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ f\,(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\square)$$

Au passage, on rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1/ Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition $(\square)$ énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

Selon l'énoncé : $f(0+0) = f(0) + f(0)$. D'où $f(0) = 2f(0)$. D'où : $f(0) = 0$

Conclusion. $f(0) = 0$

b/ Etablir que f est impaire.

La fonction f est définie sur $\mathbb{Q}$, qui est une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. On a : $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ selon l'énoncé.

On a également : $f(x + (-x)) = f(0) = 0$ d'après la question précédente.

On en déduit que : $f(x) + f(-x) = 0$.

En résumé, f est définie sur $\mathbb{Q}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0, et : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) + f(-x) = 0$.

Conclusion. La fonction f est impaire.

c/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$$

Par récurrence sur n, analogue à celle du DS1, exercice 5.

d/ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$

Il suffit d'appliquer le résultat précédente à $x = 1$ (qui est en effet un rationnel...).

e/ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)$

D'après la question précédente, on a déjà : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$.

Soit n un entier négatif. Puisque f est impaire, on a : $f(-n) = -f(n)$.

Or, d'après la question précédente : $f(-n) = -nf(1)$.

On déduit des 2 lignes précédentes que : $-f(n) = -nf(1)$. D'où : $f(n) = nf(1)$. Ce qui prouve la relation dans le cas où $n \in \mathbb{Z}_-$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)$

f/ En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$

Soit $x \in \mathbb{Q}$: $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ x = \dfrac{p}{q}$.

On a : $f(qx) = f\left(q\dfrac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$.

Par ailleurs, $f(qx) = qf(x)$ d'après la question 1-c.

Ainsi : $qf(x) = pf(1)$. D'où : $f(x) = \dfrac{p}{q}f(1)$. Ainsi : $f(x) = xf(1)$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$

2/ A l'aide de la question 1, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition ($\square$).

Par une analyse-synthèse analogue à celle de l'exo 5 du DS1, on déduit de ce qui précède que les fonctions f solutions du problème sont exactement celles définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 — (Sommes) Soit n un entier naturel non nul.

1/ Calculer la somme :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} k^2$$

D'après le cours : $S_1 = \dfrac{2n\,(2n+1)\,(4n+1)}{6}$

Conclusion. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2 = \dfrac{n\,(2n+1)\,(4n+1)}{3}$

2/ Calculer la somme :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k^2$$

On a :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k^2 = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{2m} \, (2m)^2 + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{2m+1} \, (2m+1)^2$$

Ainsi :

$$S_2 = \sum_{m=0}^{n} 4m^2 - \sum_{m=0}^{n-1} (4m^2 + 4m + 1)$$

$$\Longleftrightarrow S_2 = \underbrace{4 \sum_{m=0}^{n} m^2 - 4 \sum_{m=0}^{n-1} m^2}_{=4n^2} - 4 \sum_{m=0}^{n-1} m - \sum_{m=0}^{n-1} 1$$

$$\Longleftrightarrow S_2 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n$$

$$\Longleftrightarrow S_2 = 4n^2 - 2n(n-1) - n$$

$$\Longleftrightarrow S_2 = 2n^2 + n$$

Conclusion. $S_2 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k^2 = n\,(2n+1)$