# Problème de la semaine 3
## (corrigé en ligne mardi 8/10)

**Exercice 1** — **(Croissances comparées)** L'objet de cet exercice est de (re-)démontrer des résultats de Terminale concernant certaines limites, et de les généraliser.

1/ Etablir que : $\forall x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

4/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$.

5/ Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs.

a/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

b/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$.

**Exercice 2** — **(Incontournable)**

Soit $n$ un entier naturel. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

**Exercice 3** — **(Linéarisation).** Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul, et $\theta$ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

2/ En déduire que :

$$\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \sin\left((2n-2k+1)\,\theta\right)$$

**Exercice 4** — **(Pour en finir avec la linéarisation...).** Soient $n$ un entier naturel non nul, et $\theta$ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1-k)\theta}$$

2/ Montrer que :

$$\cos^{2n+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \cos\left((2n+1-k)\,\theta\right)$$

**Exercice 5 — $\boxed{\textbf{(Problème des 13 réels)}}$**

1/ Rappeler sans justification le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

2/ Etablir que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

3/ Soient $x_1$, $x_2$,…, $x_{13}$ treize réels quelconques. Démontrer qu'il existe deux réels distincts $x_i$ et $x_j$ tels que :

$$0 \leqslant \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}$$