Problème de la semaine 3
(corrigé en ligne mardi 8/10)

Exercice 1 — **(Croissances comparées)** L'objet de cet exercice est de (re-)démontrer des résultats de Terminale concernant certaines limites, et de les généraliser.

1/ Etablir que : $\forall x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

4/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

5/ Soient α et β deux réels strictement positifs.

a/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

b/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$.

1/ Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ (théorèmes généraux) et pour tout réel x positif on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - x - 1 \qquad \text{et } f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

La fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion. Pour tout $x \geqslant 0$ on a : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

2/ Soit x un réel > 0. D'après la question précédente :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$$

Puisqu'il est clair que le terme de droite de cette inégalité tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit le résultat désiré par comparaison.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

3/ Soit x un réel strictement positif. En posant $X = \ln(x)$, on peut réécrire la limite de l'énoncé :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X}$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ d'après la question précédente.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4/ Soit x un réel strictement positif. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on peut réécrire la limite de l'énoncé :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0$ d'après la question précédente.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

5/ Soient α et β deux réels strictement positifs.

a/ Soit x un réel > 0. On a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{\beta\ln(x)}} = \mathrm{e}^{\alpha x - \beta\ln(x)} = \mathrm{e}^{x\left(\alpha - \beta\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

Selon la question 3, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$

Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \alpha - \beta\frac{\ln(x)}{x} = \alpha$

Puisque $\alpha > 0$, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\alpha - \beta\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Finalement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\left(\alpha-\beta\frac{\ln(x)}{x}\right)} = +\infty$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

b/ Soit x un réel > 1. On a :

$$\frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(\ln(x))}}{\mathrm{e}^{\beta\ln(x)}} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(\ln(x)) - \beta\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x)\left(\alpha\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} - \beta\right)}$$

Or, selon la question 3, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$

On en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\alpha\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} - \beta = -\beta$

Puisque $\beta > 0$, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(\alpha\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} - \beta\right) = -\infty$

Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln(x)\left(\alpha\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}-\beta\right)} = 0$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$

Exercice 2 — (Incontournable)

Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Soit n un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^k\right)=\mathrm{Im}\left(\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^n\right)\qquad(\spadesuit)$$

Or : $\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^n=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)\right]^n=\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^n=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right]^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3}\qquad(\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$.

Exercice 3 — (Linéarisation). Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=-\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

2/ En déduire que :

$$\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{-1}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\sin\left((2n-2k+1)\,\theta\right)$$

1/ Dans la première somme, on procède à un changement d'indice $(K=2n+1-k)$ pour obtenir :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^{2n+1-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

Or : $(-1)^{2n+1-k}=-(-1)^k$, d'où la conclusion.

2/ On a : $\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}\mathrm{i}^{2n+1}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}$.

On peut observer que : $\frac{1}{\mathrm{i}^{2n+1}}=\frac{1}{\mathrm{i}^{2n}\times\mathrm{i}}=\frac{1}{(-1)^n\times\mathrm{i}}=\frac{(-1)^n}{\mathrm{i}}$. Donc : $\sin^{2n+1}(\theta)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}\qquad(\spadesuit)$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1-k)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}(\clubsuit)$$

On décompose cette somme en “deux morceaux” :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k e^{i(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k e^{i(2n-2k+1)\theta}$$

D’après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\left[e^{i(2n-2k+1)\theta}-e^{-i(2n-2k+1)\theta}\right]$$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=2i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin\left((2n-2k+1)\theta\right)\quad(\heartsuit)$

D’après ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$), on a : $\boxed{\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{-1}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin\left((2n-2k+1)\theta\right)}$

Exercice 4 — **(Pour en finir avec la linéarisation. . .).** Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n+1-k)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}e^{-i(2n+1-k)\theta}$$

2/ Montrer que :

$$\cos^{2n+1}(\theta)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left((2n+1-k)\theta\right)$$

1/ Par symétrie des coefficients binomiaux, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-k}e^{i(2n-2k+1)\theta}$.

Cette observation faite, on procède au changement d’indice : $K=2n+1-k$. Lorsque k varie de $(n+1)$ à $(2n+1)$, K prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n. On en déduit que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=\sum_{K=0}^{n}\binom{2n+1}{K}e^{i(2n-4n-2+2K+1)\theta}=\sum_{K=0}^{n}\binom{2n+1}{K}e^{-i(2n-2K+1)\theta}$$

D’où : $\boxed{\textbf{Conclusion. }\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}e^{-i(2n-2k+1)\theta}}$.

2/ On a : $\cos^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n+1}\quad(\spadesuit)$

D’après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n+1-k)\theta}e^{-ik\theta}$

$$=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{i(2n-2k+1)\theta}(\clubsuit)$$

On décompose cette somme en “deux morceaux” :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

D’après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

D’où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}\right)$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left((2n-2k+1)\theta\right)\quad(\heartsuit)$

D’après ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$), on a : $\boxed{\displaystyle\cos^{2n+1}(\theta)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left((2n-2k+1)\theta\right)}$

Exercice 5 — (Problème des 13 réels)

1/ Rappeler sans justification le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2/ Etablir que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

3/ Soient x_1, x_2,…, x_{13} treize réels quelconques. Démontrer qu’il existe deux réels distincts x_i et x_j tels que :

$$0\leqslant\frac{x_j-x_i}{1+x_ix_j}\leqslant 2-\sqrt{3}$$

1/ La fonction tangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et sa limite à gauche de $\pi/2$ (*resp.* à droite de $-\pi/2$) est égale à $+\infty$ (*resp.* $-\infty$). En particulier, puisqu’elle est continue, tout réel admet un unique antécédent par la fonction tangente dans l’intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$.

2/ Selon la formule de soustraction pour la tangente, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}}$

3/ Soient x_1, x_2,..., x_{13} treize réels quelconques. En vertu de la question 1, il existe treize réels y_1,..., y_{13} dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ tels que $x_i = \tan(y_i)$ (pour tout $i \in [\![1, 13]\!]$).

On découpe alors l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ en 12 "petits morceaux" de longueur égale (donc de longueur $\pi/12$) :

$$\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right], \; \left] -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{12} \right], \ldots, \; \left] -\frac{\pi}{2} + 11\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Puisque les réels y_1,..., y_{13} sont au nombre de 13 (waouh !), au moins deux d'entre eux appartiennent au même "petit morceau". Il existe donc deux réels y_i et y_j (avec i et j distincts) tels que :

$$0 \leqslant y_j - y_i \leqslant \frac{\pi}{12}$$

La fonction tangente étant strictement croissante sur l'intervalle considéré, on en déduit que :

$$0 \leqslant \tan(y_j - y_i) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

D'où, grâce à la question 2 (et à la définition des réels y_k) : $\boxed{0 \leqslant \dfrac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}}$