MPSI – Colle 5 (14 au 18 octobre 2024) – Fonctions à valeurs réelles (suite et fin) : méthodes pratiques

Cette semaine, l'accent est mis sur les méthodes pratiques pour la résolution d'exercices "de base" sur le chapitre 5 (fonctions à valeurs réelles.

Sur la forme, le plan de ce programme se distingue donc des précédents : au lieu de présenter linéairement les différentes notions du cours, on indique ci-dessous les questions standard relatives à chaque thème, illustrées par des exemples pour la plupart traités en cours ou en TD.

Chapitre 5 : Fonctions à valeurs réelles

1/ **Parité**. Montrer qu'une fonction est paire ou impaire.

Exemple : montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est impaire.

2/ **Dérivabilité**. Montrer/Justifier qu'une fonction est dérivable (en un réel a ou sur un intervalle I) :

— en utilisant les théorèmes généraux ;

— ou en revenant à la définition (limite du taux d'accroissement)

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $f(x) = x^2/2$ si $x > 0$; $f(x) = -x^2/2$ si $x < 0$; et $f(0) = 0$.

Selon les théorèmes généraux f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On prouve que f est également dérivable en 0 en montrant que la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ existe et est finie.

3/ **Sens de variation**. Etudier le sens de variation d'une fonction dérivable, en déterminant le signe de sa dérivée. Ceci implique de connaître les dérivées usuelles, et les formule donnant la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée... (formulaire).

Exemple : étudier le sens de variation de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{1/x}$.

4/ **Développements limités**. Utiliser les DL1 usuels pour lever une indétermination dans un calcul de limite (en 0 ou en $+\infty$ principalement).

Exemples. Limites en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{x} = -\frac{1}{2}$

Limites en $+\infty$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$;

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

5/ **Dérivées n-èmes**. Calculer la dérivée n-ème d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, en utilisant :

— les dérivées n-èmes usuelles et la linéarité.

Exemple : $f(x) = 2\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\cos(x) \Longrightarrow f^{(n)}(x) = 2\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\cos\left(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

— la formule de Leibniz.

Exemple : $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{\lambda x} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = (2x-3)\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x} + 2n\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$

— un raisonnement par récurrence.

Exemple : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Puissances et exponentielles de base a. Tout oublier pour se concentrer sur la formule :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$$

Appliquer cette formule à :

— l'étude d'une fonction : sens de variation de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{1/x}$.

— la résolution d'une équation.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

— la résolution d'une inéquation.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $a^{(x^2)} < \sqrt{a}^{\,7x-3}$ (en fonction du paramètre $a > 0$).

Questions de cours

- Dérivée n-ème de cos
- Dérivée n-ème de $x \longmapsto 1/1-x$
- Dérivée n-ème de $x \longmapsto x^N$
- **Théorème (formule de Leibniz).** Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

- **Croissances comparées.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\forall\, (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$