Colle 5 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — Dérivée n-ème de cos.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{P}(n)$ l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

➤ **Initialisation** ($n = 0$). Pour tout réel x : $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \dfrac{0 \times \pi}{2}\right)$. $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

➤ **Hérédité.** Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

On en déduit que $\cos^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left[\cos^{(n)}\right]'(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$ Ce qui signifie que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

Question de cours n^{0}2 — Soit f la fonction définie sur $I = \left]1, +\infty\right[$ en posant : $\forall x > 1,\ f(x) = 1/(1-x)$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et : $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$) sur I, et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\frac{-n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, achève cette récurrence et fournit la propriété désirée.

Question de cours n^{0}3 — Soit N un entier naturel, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^N$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n} & \text{si } n \in [\![0, N]\!] \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$

Preuve par récurrence <u>**finie**</u>* pour la partie non-triviale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$.

➤<u>**Initialisation**</u>. Pour $n = 0$, et pour tout réel x on a : $f^{(0)}(x) = f(x) = x^N = \dfrac{N!}{(N-0)!}x^{N-0}$

On déduit de cette remarquable observation que $P(0)$ est vraie.

➤<u>**Hérédité**</u>. **Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \in [\![0, N-1]\!]$.**

Sous cette hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$.

Donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}(N-n)x^{N-n-1} = \dfrac{N!}{(N-(n+1))!}x^{N-(n+1)}$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie.

➤<u>**Conclusion**</u>. On a établi que $P(0)$ est vraie, et : $\forall n \in [\![0, N-1]\!],\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

On en déduit que : $\forall n \in [\![0, N]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{N!}{(N-n)!}x^{N-n}$

En particulier, $f^{(N)}$ est constante égale à $N!$. Il s'ensuit que $f^{(N+1)}$ est nulle, et plus généralement toutes les dérivées $f^{(p)}$ avec p strictement supérieur à N le sont.

$*$. Une rareté !

Question de cours n^{0}4 — **Théorème (formule de Leibniz)** : Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n.

Posons $\mathrm{P}(n)$: $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I).

➤**Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal † : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, et pour tout couple de fonctions (f, g) de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Question de cours n^{0}5 — **Croissances comparées.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \,; \quad \forall\, (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons : $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (selon les TG).

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f'(x) = e^x - 1 - x$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$).

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme en outre $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^x}{x} \geqslant \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$

On en déduit par comparaison que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad (\spadesuit)$

Par le biais du changement de variable $X = \ln(x)$, on obtient : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X}$.

On en déduit avec $(\spadesuit)$ que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad (\clubsuit)$

Enfin, soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta \ln(x)}} = e^{\alpha x - \beta \ln(x)} = e^{x\left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

D'après $(\clubsuit)$, on a : $\lim_{x \to +\infty} \alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} = \alpha > 0$. D'où : $\lim_{x \to +\infty} x \left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

On en déduit que : $\forall\, (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

---

†. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n]\!], \ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $f(x) = x^2/2$ si $x \geqslant 0$; $f(x) = -x^2/2$ si $x < 0$.
Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que $f \notin \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Expliquer brièvement comment en déduire une fonction g telle que : $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que $g \notin \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. — Calculer la dérivée n-ième de f, définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Exercice 3. — Soient a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{ch}\,(ax+b)$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}(x) = a^{2n} g(x)$

Exercice 4. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$

Exercice 5. — Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{2024^x}{x^{2024}}$

Exercice 6. — Etudier la fonction $f : x \longmapsto x^{1/x}$ *(ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).*

Un mot sur les Théorèmes Généraux

Théorème général 1.
Soit $\bullet \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\bullet$ partout où il est raisonnable qu'elles le soient.

Théorème général 2.
Soit $\bullet \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Tout cocktail (somme, produit, quotient, composée, combinaison linéaire) de fonctions de classe $\mathscr{C}^\bullet$ est de classe $\mathscr{C}^\bullet$ partout où cela est raisonnable.

Exemples d'application.

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin(\mathrm{e}^x) + (x-1)\ln\left(1+x^2\right)}{\mathrm{ch}^3(x)+1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\},\ f(x) = \dfrac{\cos(2x-\pi)\sqrt{x}}{x-1}$. Selon les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Banque d'exercices — Corrigés