Exos 5 : Fonctions à valeurs réelles – Eléments de correction

Généralités

Exercice 1. — Résoudre l'équation : $\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0$.

On pose $X = \ln(x)$. Moyennant ce changement de variable, l'équation devient : $X^2 - X - 30 = 0$. Le réel 6 est racine évidente de cette équation : la seconde est donc $\dfrac{-30}{6} = -5$.

On en déduit qu'un réel x est solution de $\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0$ SSI $\ln(x) = 6$ ou $\ln(x) = -5$.

Conclusion. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\left[\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0\right] \Longleftrightarrow \left[x = \mathrm{e}^6 \text{ ou } x = \mathrm{e}^{-5}\right]$

Exercice 2. — Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Pour tout réel x, posons $P(x) = x(1-x) = x - x^2$.

La fonction P est polynomiale du second degré, et le coefficient de x^2 ("le a") est strictement négatif. Il s'ensuit que P est strictement croissante sur $]-\infty, -\dfrac{b}{2a}]$, puis strictement décroissante sur $[-\dfrac{b}{2a}, +\infty[$ (avec $a = -1$ et $b = 2$).

En particulier, la fonction P admet un maximum en $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$. Un calcul sans difficulté permet d'affirmer que ce maximum est $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Exercice 3. — Résoudre les inéquations suivantes, et représenter les ensembles des solutions sur la droite réelle.
a/ $|x-1| \leqslant 2$

Soit x un réel. On a :

$$|x-1| \leqslant 2 \text{ SSI la distance entre } x \text{ et } 1 \text{ est inférieure ou égale à } 2$$

Conclusion. Soit x un réel. On a : $|x-1| \leqslant 2 \Longleftrightarrow x \in [-1, 3]$

b/ $|x+2| > 1$

Soit x un réel. On a :

$$|x+2| > 1 \text{ SSI la distance entre } x \text{ et } (-2) \text{ est strictement plus grande que } 1$$

Conclusion. Soit x un réel. On a : $|x+2| > 1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$

c/ $|x-3| = 2$

Soit x un réel. On a :

$$|x-3| = 2 \text{ SSI la distance entre } x \text{ et } 3 \text{ est égale à } 2$$

Conclusion. Soit x un réel. On a : $|x-3| = 2 \Longleftrightarrow x \in \{1, 5\}$

d/ $|x-1| < \alpha$ (avec $\alpha > 0$)

Soit x un réel. On a :

$$|x-1| < \alpha \text{ SSI la distance entre } x \text{ et } 1 \text{ est strictement inférieure à } \alpha$$

Conclusion. Soit x un réel. On a : $|x-1| < \alpha \Longleftrightarrow x \in]1-\alpha, 1+\alpha[$

Exercice 4. — Résoudre les inéquations

a/ $|2x-1| \leqslant 1$

Soit x un réel. On a :

$$|2x-1| \leqslant 1 \iff |2x-1|^2 \leqslant 1^2 \iff (2x-1)^2 \leqslant 1^2 \iff 4x^2-4x \leqslant 0 \iff 4x\,(x-1) \leqslant 0 \iff x \in [0,1]$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ |2x-1| \leqslant 1 \iff x \in [0,1]$

b/ $|3x+2| \geqslant 4$

Soit x un réel. On a :

$$|3x+2| \geqslant 4 \iff |3x+2|^2 \geqslant 4^2 \iff (3x+2) \geqslant 16 \iff 9x^2+12x+4 \geqslant 16 \iff 9x^2+12x-12 \geqslant 0$$
$$\iff 3x^2+4x-4 \geqslant 0$$

Il reste à observer que $3x^2+4x-4$ est un polynôme du second degré qui possède exactement 2 racines réelles : -2 et $\dfrac{2}{3}$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ |3x+2| \geqslant 4 \iff x \in]-\infty,-2] \cup [2/3,+\infty[$

c/ $|2x-1| \geqslant |x+2|$

Soit x un réel. On a :

$$|2x-1| \geqslant |x+2| \iff |2x-1|^2 \geqslant |x+2|^2 \iff (2x-1)^2 \geqslant (x+2)^2 \ldots$$

Comme dans les deux questions précédentes, on se ramène à une étude de signe pour un polynôme du second degré.

Dérivabilité, applications de la dérivation

Exercice 5. — Dans chacun des exemples suivants, calculer la dérivée de f (lorsque cette dérivée existe).

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sin(\varphi - x)$ (avec $\varphi \in \mathbb{R}$)

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -\cos(\varphi - x)$$

2/ $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$$

3/ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \mathrm{ch}\left(x^3-2x\right)$

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = (3x^2-2)\mathrm{sh}\left(x^3-2x\right)$$

4/ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}\cos(x)$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \mathrm{e}^{ax+b}\left(a\cos(x) - \sin(x)\right)$$

5/ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sin^5(x)$

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 5\cos(x)\sin^4(x)$$

6/ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

7/ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^n(x)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$$

8/ $\forall x > 0, \quad f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

Commençons par observer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(x)$

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) = -\frac{1}{2x}$$

Exercice 6. — Prouver que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sin(x) \leqslant x$.

Pour tout réel x, posons $f(x) = \sin(x) - x$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \cos(x) - 1$.

La fonction cos étant majorée par 1, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}$; la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en outre $f(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \leqslant 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sin(x) - x \leqslant 0$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sin(x) \leqslant x$

Exercice 7. — Montrer que pour tout réel x positif on a : $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Est-ce vrai pour tout réel x ?

Pour tout réel x, posons $f(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \mathrm{sh}(x) - x$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) = \mathrm{ch}(x) - 1$.

La fonction ch étant minorée par 1, on en déduit que f'' est positive sur $\mathbb{R}$; la fonction f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en outre $f'(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f' est à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$; la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en outre $f(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f est à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \geqslant 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \mathrm{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \geqslant 0$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$

Cette relation reste valide sur $\mathbb{R}$ tout entier, par parité des deux termes de l'inégalité.

Remarque : à l'avenir, on pourra justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \mathrm{sh}(x) \geqslant x$ en exploitant la convexité de sh sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. — Prouver que pour tout réel $x \in \left]0;\pi/2\right[$, on a : $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$

Même principe que dans les deux exos précédents (étude de fonction).

Exercice 9. — 1/ Démontrer que pour tout réel $u > -1$, on a : $\ln(1+u) \leqslant u$.

Même principe que dans les exos 6 et 7 (étude de fonction).

2/ A l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

Appliquer le résultat de la question précédente avec $u = 1/n$, puis utiliser la croissance de la fonction exponentielle.

Exercice 10. — **(Dérivation et parité)** — Soit f une fonction dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

Soit f une fonction dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro, que nous noterons E.

Supposons f paire. Alors :

$$\forall x \in E,\ f(-x) = f(x)$$

Par hypothèse, on peut dériver terme à terme cette relation pour obtenir :

$$\forall x \in E,\ -f'(-x) = f'(x)$$

Soit : $\forall x \in E,\ f'(-x) = -f'(x)$. On en déduit que f' est paire.

Conclusion. Si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.

Par un raisonnement analogue : si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.

Exercice 11. — Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est-elle définie ? Dérivable ? Donner l'expression de sa dérivée.

On commence par déterminer l'ensemble de définition de f :

le réel $f(x)$ est défini SSI $x^2 - x^3 \geqslant 0$ SSI $x^2(1-x) \geqslant 0$ SSI $1 - x \geqslant 0$ SSI $x \leqslant 1$

L'ensemble de définition de f est donc $D_f =]-\infty, 1]$.

Déterminons à présent l'ensemble de dérivabilité de f. La fonction f est dérivable en tout point x de D_f tel que $x^2 - x^3 \neq 0$; c'est à dire que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

De plus : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[,\ f'(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$

Il reste à étudier la dérivabilité en 0 et en 1_-. Dans ces deux cas, les études des taux d'accroissements montrent que f n'est pas dérivable.

Conclusion. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie sur $]-\infty, 1]$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, et : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[,\ f'(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$

La fonction f n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

Exercice 12. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 3\,|x - y|^2$. Prouver que f est constante.

Soit x un réel quelconque. Pour tout réel h non nul, on a : $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant 3\,|h|$.

Par passage à la limite lorsque h tend vers 0, on en déduit que : $f'(x) = 0$.

Le réel x étant quelconque dans le raisonnement précédent, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 13. — Montrer que pour tout réel x on a : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

Voir DS2, exercice 1, question 5.

Exercice 14. — Montrer que ch(ln(2)) est un nombre rationnel, que l'on explicitera.

Par définition : $\text{ch}(\ln(2)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4} \in \mathbb{Q}$

Exercice 15. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\text{ch}(x) = 2$. Puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\text{ch}(x) = -2$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 2 \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 4 \iff \mathrm{e}^x - 4 + \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 1 = 0$$

Posons : $X = \mathrm{e}^x$. L'équation se réécrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$. C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. Elle possède donc exactement deux racines réelles :

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{càd} \qquad 2 \pm \sqrt{3}$$

Par suite :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff \mathrm{e}^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Après avoir observé que $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ sont des réels strictement positifs, on peut conclure :

$$\text{ch}(x) = 2 \iff x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

L'équation $\text{ch}(x) = -2$ est beaucoup plus rapide à résoudre : en effet, la fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$, et l'équation ne possède donc aucune solution réelle.

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\text{ch}^2(x) + \text{ch}(x) - 6 = 0$

Soit x un nombre réel. Posons : $X = \text{ch}(x)$. L'équation de l'énoncé s'écrit alors : $X^2 + X - 6 = 0$. Le réel 2 est racine évidente de cette équation, donc la seconde est $-6/2 = -3$.

On en déduit que :

$$\text{ch}^2(x) + \text{ch}(x) - 6 = 0 \iff \text{ch}(x) = 2 \text{ ou } \text{ch}(x) = -3$$

La résolution de $\text{ch}(x) = 2$ a déjà été faite dans l'exo précédent.

L'équation $\text{ch}(x) = -3$ ne possède aucune solution, puisque la fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. — Montrer que pour tout couple de réels (a, b) on a : $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\ \text{ch}(b) + \text{sh}(a)\ \text{sh}(b)$

Il suffit de développer le terme de droite de l'égalité :

$$\text{ch}(a)\ \text{ch}(b) + \text{sh}(a)\ \text{sh}(b) = \frac{\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}\right)\left(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}\right)}{4} + \frac{\left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right)\left(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b}\right)}{4}$$

et de constater que l'on obtient une expression égale au terme de gauche.

Remarque. On peut également obtenir une formule d'addition pour le sinus hyperbolique. Toutes les conditions sont alors réunies pour construire le formulaire de trigonométrie hyperbolique, qui ressemble beaucoup à celui de trigonométrie circulaire, aux signes près…

Mais rassurez-vous : le formulaire de trigo hyperbolique n'est pas au programme de prépa : seule la relation fondamentale ($\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$) est à connaître.

Exercice 18. — Soit y un réel strictement supérieur à 1. Etablir que l'équation $\text{ch}(x) = y$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, et que ces solutions sont opposées.

Soit y un réel strictement supérieur à 1, et soit x un réel. On a :

$$\text{ch}(x) = y \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^x + e^{-x} = 2y \iff e^{2x} + 1 = 2ye^x \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

Dans cette dernière équation, posons : $X = e^x$. L'équation s'écrit alors : $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2, de discriminant : $\Delta = \sqrt{4y^2 - 4} \iff \Delta = 2\sqrt{y^2 - 1}$.

L'hypothèse faite sur le réel y entraîne : $\Delta > 0$. Il s'ensuit que l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$ possède exactement 2 racines réelles :

$$X_{+,-} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} \iff X_{+,-} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

En résumé, on a établi que si x est un nombre réel, alors :

$$\text{ch}(x) = y \iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Il reste à voir que $y + \sqrt{y^2 - 1}$ et $y - \sqrt{y^2 - 1}$ sont des réels strictement positifs pour conclure.

Conclusion. Pour tout réel $y > 1$, l'équation $\text{ch}(x) = y$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

On vérifie que x_1 et x_2 sont opposées en calculant leur somme, et en s'assurant que $x_1 + x_2 = 0$.

Exercice 19. — Etablir que, pour tout entier naturel n et pour tout réel non nul x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{nx/2} \frac{\text{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Soit n un entier naturel n, et soit x un réel non nul. On peut observer que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k$$

La somme à calculer est géométrique de raison e^x ; et cette raison est différente de 1 puisque l'on a supposé $x \neq 0$.

On peut donc affirmer que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}$$

Les calculs sont alors analogues à ceux de l'exercice 1 de la banque, colle 3 (avec "les i en moins").

Exercice 20. — Etablir que pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Soient x un réel et n un entier naturel. Selon la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} = (1 + e^x)^n = \left[e^{x/2}\left(e^{-x/2} + e^{x/2}\right)\right]^n = \left[e^{x/2} 2\text{ch}(x/2)\right]^n = 2^n e^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Conclusion. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} = 2^n e^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 21. — **Linéarisation**. Soit x un réel quelconque. Linéariser $\text{ch}^4(x)$, puis linéariser $\text{sh}^3(x)$.

Pour tout réel x on a :

$$\text{ch}^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4x} + 4\mathrm{e}^{2x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-4x}\right) = \frac{1}{16}\left(2\text{ch}(4x) + 8\text{ch}(2x) + 6\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) = \dfrac{\text{ch}(4x)}{8} + \dfrac{\text{ch}(2x)}{2} + \dfrac{3}{8}$

Pour tout réel x on a :

$$\text{sh}^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}\right) = \frac{1}{8}\left(2\text{sh}(3x) - 6\text{sh}(x)\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}^3(x) = \dfrac{\text{sh}(3x)}{4} - \dfrac{3\text{sh}(x)}{4}$

Exercice 22. — **Délinéarisation**. Exprimer $\text{ch}\,(3x)$ en fonction de $\text{ch}\,(x)$ pour tout réel x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\text{ch}^3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-3x}}{8} \iff 8\text{ch}^3(x) = 2\text{ch}(3x) + 6\text{ch}(x)$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(3x) = 4\text{ch}^3(x) - 3\text{ch}(x)$

Exercice 23. — **"Angle-moitié"**. Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$1 - \mathrm{e}^x = \lambda\, \mathrm{e}^{x/2}\, \text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

où λ est un réel dont la valeur est à préciser.

Pour tout réel x on a : $1 - \mathrm{e}^x = -2\, \mathrm{e}^{x/2}\, \text{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Utilisation des développements limités

Exercice 24. — Déterminer les limites suivantes :

a/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$

b/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} = \frac{-1}{2}$

c/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{3x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{3x} = \frac{-1}{3}$

d/ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

Cf colle 4.

Exercice 25. — Déterminer les limites suivantes :

a/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

b/ $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$

c/ $\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

d/ $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)$

$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right) = 1$

Exercice 26. — Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ell_3 = \lim_{n\to+\infty} (n-\ln(n))\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Même principe que dans l'exo analogue de la colle 4 : $\ell_1 = 0$; $\ell_2 = +\infty$ et $\ell_3 = 1$

Exercice 27. — Etablir que : $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Cf colle 4.

Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 28. — Calculer la dérivée n-ième de f dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$

Selon les TG, les fonctions $g : x \longmapsto 2x-1$ et $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geqslant 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)}h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + \binom{n}{1}2a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} = (2x-1)a^n\mathrm{e}^{ax+b} + 2na^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b} =$$
$$[a(2x-1)+2N]\,a^{n-1}\mathrm{e}^{ax+b}$$

2/ $f(x) = 4x\sin(x)$

Selon les TG, les fonctions $g : x \longmapsto 4x$ et $h : x \longmapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geqslant 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + \binom{n}{1} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = x \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

3/ $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Utiliser la formule de duplication pour le sin pour éviter Leibniz.

4/ $f(x) = \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^x$

Même principe que dans la question 1, avec un terme de plus dans la somme.

5/ $f(x) = \cos^3(x)$

Linéariser $\cos^3(x)$ pour raccourcir specatculairement les calculs.

6/ $f(x) = x\mathrm{ch}(x)$

Même principe que dans le 1.

Exercice 29. — Calculer la dérivée n-ième de chacune des fonctions f, g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 30. — Soient a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{ch}\,(ax+b)$$

Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}(x) = a^{2n} g(x)$.

Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}(x) = a^{2n} g(x)$

➤ Initialisation ($n = 0$). On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2\times 0)}(x) = g(x) = a^0 g(x)$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}(x) = a^{2n}\mathrm{ch}(ax+b)$.
La fonction $g^{(2n)}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui rend légitime le calcul suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n+1)}(x) = \left(g^{(2n)}\right)'(x) = a^{2n+1}\mathrm{sh}(ax+b)$$

On déduit de cette expression que la fonction $g^{(2n+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui rend légitime le calcul suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n+2)}(x) = \left(g^{(2n+1)}\right)'(x) = a^{2n+2}\mathrm{ch}(ax+b)$$

Ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie, et établit donc l'hérédité de la propriété.

➤ **Conclusion**. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}(x) = a^{2n} g(x)$.

Exercice 31. — 1/ Calculer de deux façons la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2n}$.

2/ En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Fonctions puissances, (in)équations...

Exercice 32. — Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x^3 \mathrm{e}^{-2x} (\ln x)^5$.

Exercice 33. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2024^x}{x^{2024}}$.

Exercice 34. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 35. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 36. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $3^{2x} - 5 \times 3^x + 6 = 0$.

Exercice 37. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $4^x - 2^{x+1} = 8$.

Exercice 38. — Déterminer les valeurs du réel x telles que : $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 39. — Montrer que pour tout x dans $]0;1[$: $\quad x^x\,(1-x)^{(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 40. — Soit a un réel strictement positif. Résoudre l'inéquation : $\quad a^{\left(x^2\right)} < \left(\sqrt{a}\right)^{7x-3}$

Exercice 41. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $\quad x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$
\begin{aligned}
& x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8} \\
\iff\ & \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(12x-8)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \\
\iff\ & \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(6x-4)\ln(x)} \\
\iff\ & \left(2x^2 - 6x + 4\right)\ln(x) = 0 \\
\iff\ & \left(x^2 - 3x + 2\right)\ln(x) = 0 \\
\iff\ & x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 0
\end{aligned}
$$

Or l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ possède exactement deux solutions : 1 et 2. Et l'équation $\ln(x) = 0$ possède une unique solution, qui est 1.

Conclusion. $\left[x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}\right] \iff [x = 1 \text{ ou } x = 2]$

Exercice 42. — Etudier la fonction $f : x \longmapsto x^{1/x}$ *(ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).*

Exercice 43. — Déterminer : $\displaystyle\max_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$

Extraits de DS

Exercice 44. — **(Inéquation).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\,2x+2}$.

Soit x un réel strictement positif. On a :

$$\begin{aligned}
& x \text{ est solution de } (I) \\
\iff & x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\,2x+2} \\
\iff & \mathrm{e}^{\left(3x^2+3x\right)\ln(x)} \leqslant \mathrm{e}^{(2x+2)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \\
\iff & \mathrm{e}^{\left(3x^2+3x\right)\ln(x)} \leqslant \mathrm{e}^{(x+1)\ln(x)} \qquad \left(\text{car } \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)\right) \\
\iff & \left(3x^2+3x\right)\ln(x) \leqslant (x+1)\ln(x) \qquad (\text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\
\iff & \underbrace{\left(3x^2+2x-1\right)\ln(x)}_{=\Pi(x)} \leqslant 0 \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Le signe de $\ln(x)$ est connu (strictement positif sur $]\,1,+\infty\,[$, strictement négatif sur $]\,0,1\,[$).
Celui de l'expression $3x^2+2x-1$ s'obtient à l'aide de la méthode usuelle pour déterminer le signe d'un polynôme de degré 2. Explicitement, le polynôme $3X^2+2X-1$ admet pour racine évidente -1. Sa seconde racine est donc $1/3$, le produit des racines étant égal à "c/a". La fonction polynomiale associée est donc strictement positive (*resp.*négative) sur $]-\infty,-1\,[\,\cup\,]\,1/3,+\infty\,[$ (*resp.* $]\,1/3,1\,[$).
On en déduit le tableau de signes de l'expression $\Pi(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\Pi(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion. On déduit de $(\spadesuit)$ et du tableau de signes ci-dessus que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est le segment : $[1/3, 1]$.

Exercice 45. — **(Limite).** Soit α un nombre réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

Déterminer en fonction de α la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$.

Rappelons que : $\forall\, x > -1,\ \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Il s'ensuit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

D'où : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n^\alpha u_n = n^{\alpha-1}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

Comme il est clair que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{2}$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}}$$

Exercice 46. — **(Autour de la fonction sh).**

On rappelle que la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1) **Questions préliminaires**.

a) Une pure question de cours : la fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et a pour limite $+\infty$ (*resp.*$-\infty$) en $+\infty$ (*resp.*en $-\infty$). Son développement limité à l'ordre 1 en 0 est : $\mathrm{sh}(x) = x + x\varepsilon(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$).

b) D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \times \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

c) Pour tout réel y, on a : $-|y| \leqslant y \leqslant |y| \quad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, pour tout réel y, on a : $y^2 + 1 > y^2$, d'où $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2}$ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Donc : $\forall y \in \mathbb{R},\ \sqrt{y^2+1} > |y| \quad (\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ y + \sqrt{y^2+1} > 0 \text{ et } y - \sqrt{y^2+1} < 0}$.

d) Soit y un réel arbitraire. On a : $\mathrm{sh}(x) = y \iff \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$.

Posons : $X = e^x$. L'équation devient alors : $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4\left(y^2+1\right)$. Puisque c'est un réel strictement positif (et que l'équation à résoudre est à coefficients réels), l'équation (en X) admet deux solutions réelles :

$$X_+ = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad X_- = y - \sqrt{y^2+1}$$

Or d'après la question précédente, on a $X_+ > 0$ et $X_- < 0$. En revenant à la variable x, on en déduit donc qu'un seul cas est possible, celui où : $e^x = X_+$, c'est-à-dire $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$.

Conclusion : pour tout réel y l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ admet une unique solution : $\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

2) **Introduction et étude d'une nouvelle fonction**.

On définit une fonction F en posant : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

a) D'après la question 1-c, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Ainsi la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ (qui est un ensemble symétrique par rapport à zéro).

Pour montrer qu'elle est impaire, il s'agit d'établir que pour tout réel x, on a : $F(-x) = -F(x)$, ou, ce qui revient au même : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) + F(x) = 0$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) + F(x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(-x^2 + x^2 + 1\right) = \ln(1) = 0$$

Conclusion : la fonction F est impaire.

b) Comme le suggère l'énoncé, on admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ [1]. Calculons F' :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Conclusion : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

On pourrait en déduire (mais l'énoncé ne le demandait pas) que la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Puisque la fonction F est dérivable en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, explicitement : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = F(0) + xF'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Puisque $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$, on en déduit que le développement limité à l'ordre 1 en 0 de F est :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

d) D'après la question précédente : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x}} = \dfrac{F(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{x + x\varepsilon(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x}\varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x}} = 0}$

Exercice 47. — (Sommes). Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel non-nul x, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k\, \mathrm{e}^{kx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$$

1/ Etablir que pour tout réel non-nul x on a :

$$g(x) = \mathrm{e}^{nx} \frac{\operatorname{sh}((n+1)\,x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

Idées : on observe que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$ est géométrique de raison e^{2x} (différent de 1 selon l'énoncé).

Puis on applique la technique de "l'angle-moitié" pour conclure.

2/ Montrer que pour tout réel non-nul x on a :

$$f(x) = (1 - \mathrm{e}^{x})\, g(x)$$

Idée-clef : on "casse la somme en deux", en séparant la somme des termes de rang pair et celle des termes de rang impair. On obtient alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k\, \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{(2k+1)x} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx} - \mathrm{e}^{x} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$$

1. Signalons tout de même que la justification de ce fait ne serait cependant pas trop difficile à apporter : la fonction F étant obtenue à partir de fonctions dérivables par somme et composition, les "théorèmes généraux sur la dérivabilité" assurent qu'elle est dérivable à son tour.

d'où la conclusion.