Exercices 4 bis – Nombres Complexes (2nde partie)

Révisions - Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 1. — Calculer les racines carrées des complexes :

1/ $z_1 = -\mathrm{i}$; 2/ $z_2 = 2+2\mathrm{i}$; 3/ $z_3 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$; 4/ $z_4 = -4\mathrm{i}$; 5/ $z_5 = 3-3\mathrm{i}$

Exercice 2. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $3-4\mathrm{i}$.

Exercice 3. — Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ en utilisant :

1/ la forme algébrique de Z ; 2/ la forme trigonométrique de Z

Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. — Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $5-2\mathrm{i}$.

Exercice 5. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ xy & = & 4+6\mathrm{i} \end{array}\right.$$

Exercice 6. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1/ $z^2+2z+i=0$ | 2/ $z^2+5z+7-i=0$ | 3/ $z^8-3z^4+2=0$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Exercice 7. — On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $(1+\mathrm{j})^{30}$.

Exercice 8. — Calculer les racines cubiques des complexes :

$z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = 2-2\mathrm{i}$; $z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$; $z_4 = 1+\mathrm{j}$ où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 9. — Déterminer les racines 4-èmes de $Z = 1+\mathrm{i}$.

Exercice 10. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $z^4-z^2-2=0$

Exercice 11. — Montrer que : $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5} = -1$

Exercice 12. — Déduire de l'exercice précédent la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$. Comment peut-on en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$?

Exercice 13. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 14. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = z^n$.

Exercice 15. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\bar{z} = z^n$.

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$

Exercice 17. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 18. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+\mathrm{i}z)^n = (1-\mathrm{i}z)^n$

Transformations du plan complexe

Exercice 19. — Dans chacun des cas suivants, donner une écriture complexe de la transformation du plan donnée :

1/ la rotation de centre l'origine du plan complexe et d'angle $\pi/4$

2/ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}\,(1+3i)$

3/ l'homothétie de centre $\Omega\,(i)$ et de rapport -2

4/ la rotation de centre $\Omega\,(2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 20. — Dans chaque cas, déterminer la transformation du plan complexe correspondant à l'écriture donnée :

1/ $z' = -z$

2/ $z' = z + i$

3/ $z' = 2\,(z-1)+1$

4/ $z' = -iz$

5/ $z' = 2 + iz - 2i$

6/ $z' = -2z - 1 - i$

Extraits de DS

Exercice 21. — **(Equation complexe).** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 + z^4 - 2 = 0$$

Exercice 22. — **(Système)** Etablir qu'il existe exactement 8 couples (u, v) de nombres complexes, que l'on explicitera, tels que :

$$\begin{cases} u^2 v = 2 \\ u^4 + v^2 = 5 \end{cases}$$

Exercice 23. — **(Equation complexe).**

1/ Déterminer les racines quatrièmes de 16 dans $\mathbb{C}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad (1+z)^4 = 16\,(1-z)^4$.

On montrera en particulier que (E) possède une solution dans $\mathbb{Z}$, une solution dans $\mathbb{Q}$, et deux solutions complexes conjuguées.

Exercice 24. — **(Similitudes).** Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ On considère la similitude S d'écriture complexe : $\quad z' = (2-2\mathrm{i})\,z + 1$.

Montrer que S peut s'écrire comme la composée d'une homothétie et d'une rotation, que l'on précisera.

2/ Soient S et S' deux similitudes directes, qui ne sont pas des translations. On suppose que S et S' ont même centre. Etablir que S et S' commutent, c'est à dire que : $S' \circ S = S \circ S'$.

Exercice 25. — Soit α un réel non multiple de π. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos(\alpha)$$