Devoir surveillé n^{0}2

Mathématiques

Durée : 3 heures

CONSIGNES

- **Ce sujet est constitué de 2 exercices et d'un problème**
- **Tout matériel électronique est interdit.**
- **Les résultats doivent être soulignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$.**

Exercice 1 — (Applications du cours – Niveau 1)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Soient q un nombre réel, et n un entier naturel. Calculer la somme : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{4k}$

2/ Soit N un entier naturel, $N \geqslant 2$. On pose :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{N} \frac{6}{(n-1)(n+1)}$$

a/ Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{6}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

b/ A l'aide de la question précédente, calculer S_2.

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(3x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

4/ **Encore un peu de trigonométrie**.

a/ Soit x un nombre réel. Calculer de deux manières différentes $\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

5/ **Et un peu de trigonométrie hyperbolique**. On rappelle que les fonctions cosinus hyperbolique (ch) et sinus hyperbolique (sh) sont définies sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Etablir que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ *(relation fondamentale de la trigo hyperbolique)*

6/ La *suite de Fibonacci* est la très célèbre suite (F_n) définie en posant :

$$\begin{cases} F_0 = 1; \quad F_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence double, établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n$

Exercice 2 — (Applications du cours - Level up)

Les questions **1**/ et **2**/ sont indépendantes.

1/ **a**/ Soit a un nombre réel. Exprimer $\sin(3a)$ en fonction de $\sin(a)$.

b/ En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ est solution d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients entiers.

C'est à dire montrer qu'il existe 4 entiers a, b, c et d que l'on explicitera tels que

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \text{ est solution de l'équation} \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

2/ **VDM.** Le but de cette question est d'établir la formule de VanDerMonde dont voici l'énoncé :

$$\forall\,(n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

a/ **Question préliminaire**. Soit k un entier naturel quelconque. Que vaut $\dbinom{0}{k}$?

b/ Pour tout entier naturel p, on note $\mathrm{A}(p)$ l'assertion ci-dessous :

$$\forall\,(n,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Etablir par récurrence sur p que $\mathrm{A}(p)$ est vraie pour tout entier naturel p.

c/ **Application**. Montrer que :

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}^2\right] = \binom{2n}{n}$$

Problème — Sommes et coefficients binomiaux

Problématique. *L'objectif de ce problème est d'étudier les sommes* $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p$, *pour différentes valeurs de l'entier* p.

Vous connaissez déjà quelques valeurs de ces sommes, en particulier lorsque $p = 3$. *Dans ce cas en effet :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n(3) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

*Vous connaissez également la démonstration par récurrence de cette formule**. *Les deux premières parties de ce problème proposent deux autres démonstrations de ce résultat, en utilisant des propriétés des sommes et des coefficients binomiaux. La troisième partie est consacrée à une brève étude du cas général (calcul de* $S_n(p)$ *pour un entier* p *quelconque).*

Notation. Tout au long du problème, on note

$$\boldsymbol{\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p}$$

Questions préliminaires

1/ En utilisant une formule du cours, développer $(k+1)^4$ (où k désigne un entier naturel).

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler sans justification les expressions de $S_n(0)$, $S_n(1)$ et $S_n(2)$.

Partie 1 - Calcul télescopique de $S_n(3)$

Dans la partie 1, n désigne un entier naturel. On pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$$

3/ En observant que U_n est une somme remarquable du cours, donner l'expression de U_n en fonction de n.

4/ Déterminer une seconde expression de U_n en fonction de n.

5/ A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la formule donnant $S_n(3)$.

*. Puisqu'elle était au programme de la colle 1.

Partie 2 - Calcul de $S_n(3)$ et relation de Pascal généralisée

6/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \ell \in [\![0, k]\!], \ \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

7/ Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Ceci est la relation de Pascal généralisée.

8/ Soit k un entier naturel. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

9/ Etablir qu'il existe trois entiers naturels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$$

10/ En utilisant les résultats de la partie 2, retrouver la formule donnant $S_n(3)$ en fonction de n.

Partie 3 - Calcul de $S_n(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$

On rappelle que pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a noté : $S_n(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^p$

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

11/ En calculant de deux manières la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right]$$

établir que :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

12/ En déduire une expression de $S_n(p)$ en fonction des sommes $S_n(q)$ avec $q \in [\![0, p-1]\!]$

13/ En déduire explicitement $S_n(5)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$, $S_n(3)$ et $S_n(4)$.