Corrigé du Devoir surveillé n^{0}2

Mathématiques

Exercice 1 — (Applications du cours – Niveau 1)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Soient q un nombre réel, et n un entier naturel. Calculer la somme : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} q^{4k}$

Soit $q \in \mathbb{R}$. Notons que : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(q^4\right)^k$. La somme S_1 est géométrique de raison q^4.

Premier cas : $q^4 = 1 \Longleftrightarrow q = \pm 1$ Dans ce cas : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

Second cas : $q^4 \neq 1 \Longleftrightarrow q \neq \pm 1$ Dans ce cas : $S_1 = \dfrac{1-q^{4n+4}}{1-q^4}$

Conclusion. $S_1 = \begin{cases} \dfrac{1-q^{4n+4}}{1-q^4} & \text{si } q \neq \pm 1 \\ n+1 & \text{si } q = \pm 1 \end{cases}$

2/ Soit N un entier naturel, $N \geqslant 2$. On pose :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{N} \frac{6}{(n-1)(n+1)}$$

a/ Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{6}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

On cherche deux réels a et b tels que : $\dfrac{6}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$ $\qquad (\spadesuit)$

➤ En multipliant $(\spadesuit)$ par $(n-1)$, on obtient : $\dfrac{6}{n+1} = a + \dfrac{b(n-1)}{n+1}$

Par évaluation en 1 on en déduit : $a = \dfrac{6}{2}$ soit $a = 3$.

➤ En multipliant $(\spadesuit)$ par $(n+1)$, on obtient : $\dfrac{6}{n-1} = \dfrac{a(n+1)}{n-1} + b$

Par évaluation en (-1) on en déduit : $b = \dfrac{6}{-2}$ soit $b = -3$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ \dfrac{6}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{3}{n-1} - \dfrac{3}{n+1}$

b/ A l'aide de la question précédente, calculer S_2.

D'après la question précédente :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{N} \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1} = 3\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = 3\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Ainsi :

$$S_2 = 3\left[\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

Les 2 sommes ci-dessus étant télescopiques, le cours permet d'affirmer que :

$$S_2 = 3\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}\right)$$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 2, \quad \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{6}{(n-1)(n+1)} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\qquad \cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Selon le cours :

$$\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \textit{ou} \\ 3x = -x - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \textit{ou} \\ 4x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

Conclusion. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}\ [\pi] \\ \textit{ou} \\ x = -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

4/ **Encore un peu de trigonométrie**.

a/ Soit x un nombre réel. Calculer de deux manières différentes $\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3$.

Soit x un nombre réel.
Selon la relation fondamentale de la trigonométrie, on a : $\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3 = 1$.

Par ailleurs, selon le binôme de Newton :

$$\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3 = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x) = 1$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Selon la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos^6(x) + \sin^6(x) = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x) \\
\Longleftrightarrow\ &3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos^2(x)\sin^2(x)\left(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos^2(x)\sin^2(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\,[\pi] \\
\Longleftrightarrow\ &x = 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit x un nombre réel :

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \Longleftrightarrow x = 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

5/ **Et un peu de trigonométrie hyperbolique**. On rappelle que les fonctions cosinus hyperbolique (ch) et sinus hyperbolique (sh) sont définies sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ *(relation fondamentale de la trigo hyperbolique)*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{4}{4}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

6/ La *suite de Fibonacci* est la très célèbre suite (F_n) définie en posant :

$$\begin{cases} F_0 = 1; \quad F_1 = 1 \\ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence double, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $F_n \geqslant n$.

Selon l'énoncé, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies puisque $F_0 = 1 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 1$.

Supposons à présent que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraient pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$F_{n+2} \underbrace{=}_{nonc} F_{n+1} + F_n \underbrace{\geqslant}_{HR} n+1+n \underbrace{\geqslant}_{QPLPPLM} n$$

Ce qui assure que $P(n+2)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n$

Exercice 2 — $\boxed{\textbf{(Applications du cours - Level up)}}$

Les questions **1/** et **2/** sont indépendantes.

1/ a/ Soit a un nombre réel. Exprimer $\sin(3a)$ en fonction de $\sin(a)$.

Soit a un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\sin(3a) = \sin(2a+a) \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(3a) = \sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a) \quad \textit{(formule d'addition pour le sin)} \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(3a) = 2\sin(a)\cos^2(a) + \sin(a)\left(1-2\sin^2(a)\right) \quad \textit{(formules de duplication)} \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(3a) = 2\sin(a)\left(1-\sin^2(a)\right) + \sin(a)\left(1-2\sin^2(a)\right) \quad \textit{(relation fondamentale)} \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(3a) = -4\sin^3(a) + 3\sin(a) \quad \textit{(relation fondamentale)}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin(3a) = -4\sin^3(a) + 3\sin(a)$

b/ En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ est solution d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients entiers.

C'est à dire montrer qu'il existe 4 entiers a, b, c et d que l'on explicitera tels que

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \text{ est solution de l'équation } \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

D'après la question précédente : $\sin\left(3 \times \dfrac{\pi}{18}\right) = -4\sin^3\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + 3\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$

Or : $\sin\left(3 \times \dfrac{\pi}{18}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

Par suite : $-4\sin^3\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + 3\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right) = \dfrac{1}{2}$

D'où : $-4\sin^3\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + 3\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right) - \dfrac{1}{2} = 0$

Finalement : $-8\sin^3\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + 6\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right) - 1 = 0$

Conclusion. $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ est solution de l'équation $\quad -8x^3 + 6x - 1 = 0$

Remarque. On pourrait utiliser ce résultat pour établir que $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ *est irrationnel.*

2/ VDM. Le but de cette question est d'établir la formule de VanDerMonde dont voici l'énoncé :

$$\forall\,(n,p,q)\in\mathbb{N}^3,\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$$

a/ Question préliminaire. Soit k un entier naturel quelconque. Que vaut $\dbinom{0}{k}$?

D'après le cours : $\dbinom{0}{k}=\begin{cases}\dfrac{0!}{0!0!}=1 \text{ si } k=0\\ \\ 0 \text{ si } k>0\end{cases}$.

Conclusion. $\forall\,k\in\mathbb{N}^*,\ \dbinom{0}{k}=0\,;$ et $\dbinom{0}{0}=1$

b/ Pour tout entier naturel p, on note $\mathrm{A}(p)$ l'assertion ci-dessous :

$$\forall\,(n,q)\in\mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$$

Etablir par récurrence sur p que $\mathrm{A}(p)$ est vraie pour tout entier naturel p.

Pour tout entier naturel p, notons $\mathrm{A}(p)$ l'assertion suivante

$$\forall\,(n,q)\in\mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$$

➤ **Initialisation**. Fixons $p=0$, et considérons n et q deux entiers naturels quelconques.

On a d'une part : $\dbinom{0+q}{n}=\dbinom{q}{n}$.

D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{0}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p}{0}\binom{q}{n}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\binom{0}{k}}_{=0 \text{ d'après } 1/}\binom{q}{n-k}$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{0-k}=\binom{q}{n}$.

Par suite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{0}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{0+q}{n}$. Ce qui assure que $A(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité**. Supposons la propriété $A(p)$ vraie pour un certain entier naturel p ; et considérons n et q deux entiers naturels quelconques.

D'après la relation de Pascal : $\displaystyle\binom{p+1}{k} = \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1}$.

Par suite : $$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k} \qquad (\spadesuit).$$

Observons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k}$ puisque le terme correspondant à $k=0$ est fait intervenir le coefficient binomial $\displaystyle\binom{p}{-1}$, qui est nul. *

On effectue alors le changement d'indice $K = k-1$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k} = \sum_{K=0}^{n-1} \binom{p}{K}\binom{q}{n-1-K} \qquad (\clubsuit).$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k}\binom{q}{n-1-k} \qquad (\heartsuit)$$

Or, par hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k}\binom{q}{n-1-k} = \binom{p+q}{n-1}$.

On en déduit, avec ($\heartsuit$), que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} + \binom{p+q}{n-1}$.

Une nouvelle application de la relation de Pascal donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+1+q}{n}$.

Les entiers n et q étant arbitraires dans le raisonnement précédent, on a établi que :
$$\forall (n,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+1+q}{n}$$

Ce qui signifie exactement que l'assertion $A(p+1)$ est vraie, et achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. $$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

*. Plus généralement, le coefficient binomial $\displaystyle\binom{n}{p}$ est nul pour tout entier strictement négatif p, et pour tout entier n.

c/ Application. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}^2 \right] = \binom{2n}{n}$$

Soient k et n deux entiers naturels. Par symétrie des coefficients binomiaux, on a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

D'après la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n+n}{n}$.

CONCLUSION. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}^2 \right] = \binom{2n}{n}$

— PROBLÈME — SOMMES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX —

NOTATION. Tout au long du problème, on note

$$\boldsymbol{\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p}$$

Questions préliminaires

1/ En utilisant une formule du cours, développer $(k+1)^4$ (où k désigne un entier naturel).

Selon le binôme de Newton : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler sans justification les expressions de $S_n(0)$, $S_n(1)$ et $S_n(2)$.

Selon le cours, pour tout entier naturel n :

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} k^0 = n+1\,; \qquad S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,; \qquad S_n(2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie 1 - Calcul télescopique de $S_n(3)$

Dans la partie 1, n désigne un entier naturel. On pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$$

3/ En observant que U_n est une somme remarquable du cours, donner l'expression de U_n en fonction de n.

La somme U_n étant télescopique, on a d'après le cours : $U_n = (n+1)^4$.

4/ Déterminer une seconde expression de U_n en fonction de n.

D'après la question 1 : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

Par linéarité de la somme : $U_n = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

Conclusion. $U_n = 4S_n(3) + 6S_n(2) + 4S_n(1) + S_n(0)$

5/ A l'aide des deux questions précédentes, retrouver la formule donnant $S_n(3)$.

D'après les questions 3 et 4, on a : $(n+1)^4 = 4S_n(3) + 6S_n(2) + 4S_n(1) + S_n(0)$

Ainsi : $4S_n(3) = (n+1)^4 - 6S_n(2) - 4S_n(1) - S_n(0)$

D'après la question 2, on a donc : $4S_n(3) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right]$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right)$

D'où : $4S_n(3) = (n+1)\left(n^3 + n^2\right) = (n+1)\, n^2\, (n+1) = n^2\,(n+1)^2$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n(3) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Partie 2 - Calcul de $S_n(3)$ et relation de Pascal généralisée

6/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall\, \ell \in [\![0, k]\!],\ \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

Voir preuve de la relation de Pascal faite en classe.

7/ Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Soient ℓ et n deux entiers naturels tels que $\ell \leqslant n$. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \underbrace{=}_{teles.} \binom{n+1}{\ell+1} - \underbrace{\binom{\ell}{\ell+1}}_{=0}$$

Conclusion. $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$

8/ Soit k un entier naturel. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

Soit k un entier naturel. Selon le cours :

$$\binom{k}{1} = k\,; \qquad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}\,; \qquad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

9/ Etablir qu'il existe trois entiers naturels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$$

Soient a, b et c trois entiers naturels. On a :

$$\begin{aligned}
& k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} \\
\Longleftrightarrow\ & k^3 = a\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b\left(\frac{k(k-1)}{2}\right) + ck \qquad \textit{(d'après la question 8)} \\
\Longleftrightarrow\ & 6k^3 = ak(k-1)(k-2) + 3bk(k-1) + 6ck \\
\Longleftrightarrow\ & 6k^3 = ak^3 + (3b-3a)\,k^2 + (2a-3b+6c)\,k \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} a = 6 \\ 3b - 3a = 0 \\ 2a - 3b + 6c = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$

10/ En utilisant les résultats de la partie 2, retrouver la formule donnant $S_n(3)$ en fonction de n.

Partie 3 - Calcul de $S_n(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$

On rappelle que pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a noté : $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

11/ En calculant de deux manières la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right]$$

établir que :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

D'une part : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right] = (n+1)^{p+1} \quad (\spadesuit)$ (somme télescopique)

D'autre part, selon le binôme de Newton : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j$

D'où : $U_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{j} k^j = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^{n} k^j = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j) \quad (\clubsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $(n+1)^{p+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j)$

12/ En déduire une expression de $S_n(p)$ en fonction des sommes $S_n(q)$ avec $q \in [\![\, 0, p-1 \,]\!]$

D'après la question précédente :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j) \iff (n+1)^{p+1} = \binom{p+1}{p} S_n(p) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_n(j)$$

Conclusion. $S_n(p) = \dfrac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_n(j)\right]$

13/ En déduire explicitement $S_n(5)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$, $S_n(3)$ et $S_n(4)$.