Devoir surveillé n^{0}3

Mathématiques

Durée : 2 heures 50 minutes

CONSIGNES

- **Ce sujet est constitué d'un exercice et de deux problèmes**
- **Tout matériel électronique est interdit.**
- **Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.**

Exercice 1 — (Applications du cours)

Les deux questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Après avoir justifié en deux mots que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} P_n(x)$$

où P_n est une fonction polynomiale à expliciter.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}$$

– Problème 1 - Autour de la fonction tangente hyperbolique –

Problématique. *Le principal objectif de ce problème est d'étudier la fonction tangente hyperbolique (notée* **T** *dans ce sujet), définie sur* $\mathbb{R}$ *comme le quotient* sh/ch.

Les deux premières parties de ce problème sont consacrées à l'étude de cette fonction. La troisième partie est une fenêtre ouverte sur l'avenir : on y étend la fonction **T** *à une fonction définie sur une partie de* $\mathbb{C}$*, avec son petit lot de surprises.*

Tout au long de ce problème, vous trouverez peut-être certaines questions techniques, mais surtout un bon nombre de questions d'application du cours, que je vous invite à traiter avec le plus grand soin. Cette précision étant donnée, amusez-vous bien !

Notations - Rappels.

➤ Tout au long du problème, on note **T** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{sh}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{ch}(\boldsymbol{x})} \quad \text{soit encore :} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} - \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}}}{\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} + \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}}}$$

➤ On rappelle que si $z = a + \mathrm{i}\, b$ (avec a et b réels) désigne un nombre complexe, **l'exponentielle de** z est le nombre complexe noté e^z défini en posant :

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{z}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{b}}$$

Questions préliminaires

Les trois questions ci-dessous sont indépendantes.

1/ **Décomposition en éléments simples.** Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

2/ Soient z et z' deux nombres complexes. Etablir que* :

$$\left[\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z}\right] \Longleftrightarrow [\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z' = z + 2\mathrm{i}k\pi]$$

3/ Pour tout réel $x \in \ ]-1,1\,[$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in \ ]-1,1\,[\ , \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \ n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Remarque. *Dans la suite de l'énoncé, on pourra admettre que si l'on pose* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *pour tout réel* $x \in \ ]-1,1\,[$*, on a :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in \ ]-1,1\,[\ , \ g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

*. Cette équivalence peut aussi être notée : $\left[\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z}\right] \Longleftrightarrow [z' = z \ [2\mathrm{i}\pi]]$

Partie 1 - Quelques propriétés de la fonction T

4/ Etablir que $\mathbf{T}$ est impaire ; puis préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

5/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{T}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

6/ Déduire des questions précédentes le tableau de variation de $\mathbf{T}$.

7/ Justifier brièvement que l'équation $\mathbf{T}(x) = 2$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$.

8/ Soit y un nombre réel, tel que $|y| < 1$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\mathbf{T}(x) = y$$

Partie 2 - Quelques propriétés de la réciproque de T

On définit une fonction $\mathbf{A}$ sur $]-1,1[$ en posant :

$$\boldsymbol{\forall x \in]-1,1[, \quad \mathbf{A}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

9/ Démontrer que $\mathbf{A} \circ \mathbf{T} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, c'est à dire démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{A}\left(\mathbf{T}(x)\right) = x$$

10/ Etablir que :

$$\forall x \in I, \quad \mathbf{A}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

11/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $\mathbf{A}$.

12/ Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)}$

13/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[, \quad \mathbf{A}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{(1+x)^n + (-1)^{n+1}(1-x)^n}{(1-x^2)^n}\right)$$

Partie 3 - Tangente hyperbolique complexe

Dans cette partie, on cherche à étendre la définition de la fonction $\mathbf{T}$ à une fonction d'une variable complexe. L'objectif de la question 14 est de déterminer l'ensemble de définition de la fonction $z \longmapsto \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

14/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$e^z + e^{-z} = 0$$

On notera S l'ensemble des solutions de cette équation, et $\mathbf{D} = \mathbb{C}\backslash S$.

On peut à présent définir la fonction $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\forall\, z \in \mathbf{D}, \quad \mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

La notation $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ est choisie pour souligner le fait que cette fonction dépend d'une variable complexe.

15/ Etablir que la fonction $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ est périodique, de période $i\pi$.

16/ Etablir que pour tout réel x tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(i\,x) = i\tan(x)$$

17/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = 2$, et plus explicitement établir que :

$$[\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = 2] \Longleftrightarrow \left[z = \ln\left(\sqrt{3}\right) + i\frac{\pi}{2} \quad [i\pi]\right]$$

—- Problème 2 - Sur la piste de $\cos(2\pi/7)$ —-

Problématique. *Pour des raisons algébriques profondes, le réel* $\cos(2\pi/7)$*, loin d'être une valeur remarquable, est un nombre suffisamment "compliqué" pour que l'on ne puisse pas exprimer sa valeur exacte sous une autre forme que…* $\cos(2\pi/7)$ *! Faute de pouvoir en obtenir une valeur exacte, le but de cet exercice est d'établir une formule "simple" faisant intervenir ce réel. Pour y parvenir, on étudiera notamment quelques propriétés des nombres complexes de module 1.*

Dans ce problème, on pose :

$$\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/7} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

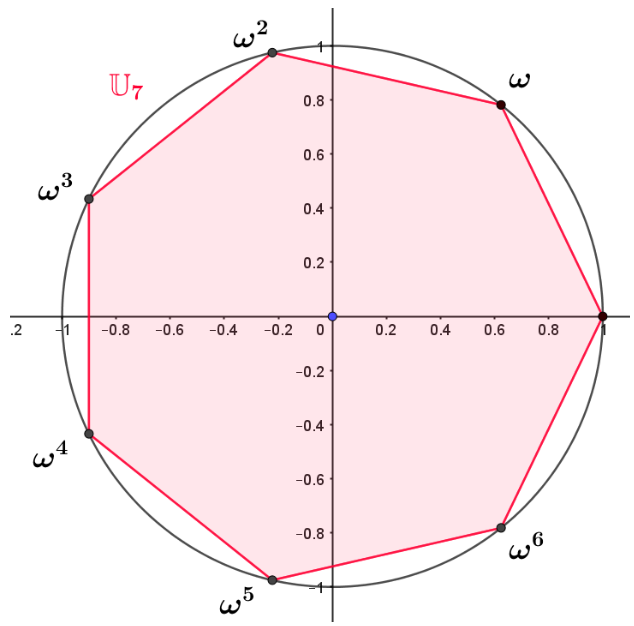
Et on note :

$$\mathbb{U}_7 = \left\{\omega^k,\ k \in [\![\, 0, 6 \,]\!]\right\} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \mathbb{U}_7 = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^6\}$$

Les éléments de $\mathbb{U}_7$ sont les sommets d'un polygone régulier à 7 côtés (un heptagone) inscrit dans le cercle unité, représenté ci-contre.

Dans un premier temps, on étudie quelques propriétés des éléments de $\mathbb{U}_7$.

Dans un second temps, on établira une relation "simple" faisant intervenir le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.



Partie A - Quelques propriétés géométriques des éléments de $\mathbb{U}_7$

1/ Etablir que :

$$\omega^7 = 1$$

2/ Centre de gravité de l'heptagone régulier. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$$

Remarque : juste pour information, cette relation signifie que le centre de gravité de l'heptagone régulier est l'origine O du plan complexe.

3/ Soit (α, β) un couple de réels. Démontrer la **formule d'Euler généralisée** suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

4/ Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, 6 \,]\!], \quad \left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Partie B - A la recherche de la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$

Dans cette partie, on pose :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

5/ Etablir que : $A + B = -1$.

6/ Etablir que :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$$

7/ Calculer AB.

8/ Etablir que : $\mathrm{Im}(A) > 0$.

9/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B.

10/ En déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$