Corrigé du Devoir surveillé n^{0}3

Mathématiques

Durée : 2 heures 50 minutes

Exercice 1 — (Applications du cours)

Les deux questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Après avoir justifié en deux mots que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x} P_n(x)$$

où P_n est une fonction polynomiale à expliciter.

Pour tout réel x, posons $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En outre :

- pour tout réel x on a : $u^{(1)}(x) = 2x$, $u^{(2)}(x) = 2$ et pour tout entier $k \geqslant 3$, $u^{(k)}(x) = 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ v^{(n)}(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}$.

D'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (x^2+1)(-1)^n\,\mathrm{e}^{-x} + 2n(-1)^{n-1}x\mathrm{e}^{-x} + n(n-1)(-1)^{n-2}\,\mathrm{e}^{-x}$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\underbrace{(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + n(n-1)(-1)^{n-2} + (-1)^n}_{P_n(x)}\right)$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}$$

Soit x un réel > 0. On a :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} > \mathrm{e}^{(9x-2)\ln\left(\sqrt{x}\right)} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} > \mathrm{e}^{(9x-2)\ln(x)/2} \Longleftrightarrow 2x^2\ln(x) > \frac{9x-2}{2}\ln(x)$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2\ln(x) > (9x-2)\ln(x)$$

D'où, en résumé : $\boxed{x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2} \Longleftrightarrow \left(4x^2-9x+2\right)\ln(x) > 0 \qquad (\spadesuit)}$

Reste donc à utiliser la méthode standard pour étudier le signe d'un produit : dresser un tableau de signes. Celui de $\ln(x)$ est connu, seul celui du polynôme du second degré mérite d'être un peu détaillé.

Le polynôme $4x^2-9x+2$ a pour discriminant 49, et on en déduit qu'il a deux racines réelles : $\dfrac{9+7}{8}=2$ et $\dfrac{9-7}{8}=\dfrac{1}{4}$. On en déduit le tableau ci-dessous (dans lequel on a noté $\Pi(x)=\left(4x^2-9x+2\right)\ln(x)$) :

x	0		$1/4$		1		2		$+\infty$
$\ln(x)$	||		$-$		0		$+$		
$4x^2-9x+2$	||	$+$	|		$-$		|	$+$	
$\Pi(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La conclusion provient de ce tableau de signes et de $(\spadesuit)$.

Conclusion. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left[x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}\right] \Longleftrightarrow \left[\quad x \in \left]\frac{1}{4},1\right[\cup \left]2,+\infty\right[\ \right]$$

– Problème 1 - Autour de la fonction tangente hyperbolique –

Notations - Rappels.

➤ Tout au long du problème, on note $\mathbf{T}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{sh}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{ch}(\boldsymbol{x})} \quad \text{soit encore :} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}}}{\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}}}$$

➤ On rappelle que si $z=a+\mathrm{i}\,b$ (avec a et b réels) désigne un nombre complexe, **l'exponentielle de** z est le nombre complexe noté e^z défini en posant :

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{z}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{b}}$$

Questions préliminaires

Les trois questions ci-dessous sont indépendantes.

1/ Décomposition en éléments simples. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

Par multiplication-évaluation, ou par identification, on obtient : $a = b = \dfrac{1}{2}$

Conclusion. $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{1-x} + \dfrac{1/2}{1+x}$

2/ Soient z et z' deux nombres complexes. Etablir que* :

$$\left[\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z}\right] \Longleftrightarrow [\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z' = z + 2\mathrm{i}k\pi]$$

Soient $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ deux nombres complexes. On a :

$$\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{a'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b'} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{a'} = \mathrm{e}^{a} \\ \\ b' = b \ \ [2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad a' + \mathrm{i}b' = a + \mathrm{i}b + 2\mathrm{i}k\pi$$

Conclusion. $\left[\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z}\right] \Longleftrightarrow [\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z' = z + 2\mathrm{i}k\pi]$

3/ Pour tout réel $x \in\ ]-1,1\,[$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ ]-1,1\,[\ ,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\ n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n) :\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, et raisonnons par récurrence sur n.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$) sur I, et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\forall x \in I =]-1,1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\frac{(-1)^n n!(n+1)\,(1+x)^n}{(1+x)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, achève cette récurrence et prouve la formule.

Conclusion. $f \in \mathscr{C}^\infty\left(]-1,1[,\mathbb{R}\right)$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ ]-1,1\,[\ ,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\ n!}{(1+x)^{n+1}}$

*. Cette équivalence peut aussi être notée : $\left[\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z}\right] \Longleftrightarrow [z' = z\ [2\mathrm{i}\pi]]$

Remarque. *Dans la suite de l'énoncé, on pourra admettre que si l'on pose* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *pour tout réel* $x \in \,]-1,1[\,$, *on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \,]-1,1[\,,\ g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Partie 1 - Quelques propriétés de la fonction T

4/ Etablir que $\mathbf{T}$ est impaire ; puis préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

La fonction $\mathbf{T}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (qui est symétrique par rapport zéro) comme le quotient d'une fonction paire et d'une fonction impaire : elle est donc impaire.

En outre, pour tout réel x on a : $\mathbf{T}(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{T}(x) = 1$. Et puisque la fonction $\mathbf{T}$ est impaire : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{T}(x) = -1$.

Conclusion. La fonction $\mathbf{T}$ est impaire ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{T}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{T}(x) = -1$

5/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{T}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

D'après les théorèmes généraux f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.^{\dagger}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

6/ Déduire des questions précédentes le tableau de variation de $\mathbf{T}$.

La fonction f est strictement croissante (d'après la question précédente) sur $\mathbb{R}$, s'annule en 0, et ses limites en $\pm\infty$ sont données par la question 4.

7/ Justifier brièvement que l'équation $\mathbf{T}(x) = 2$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, la fonction $\mathbf{T}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$, et ne peut donc pas prendre la valeur 2...

Conclusion. L'équation $\mathbf{T}(x) = 2$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$.

†. Puisque : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique).

8/ Soit y un nombre réel, tel que $|y| < 1$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\mathbf{T}(x) = y$$

Soit y un nombre réel, tel que $|y| < 1$. On a :

$$[\mathbf{T}(x) = y] \iff \left[\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = y\right] \iff [\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = y\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^{-x}] \iff [(1-y)\mathrm{e}^x = (1+y)\mathrm{e}^{-x}]$$

$$\iff \left[(1-y)\mathrm{e}^{2x} = (1+y) \iff \left[\mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y}\right]\right]$$

D'où :

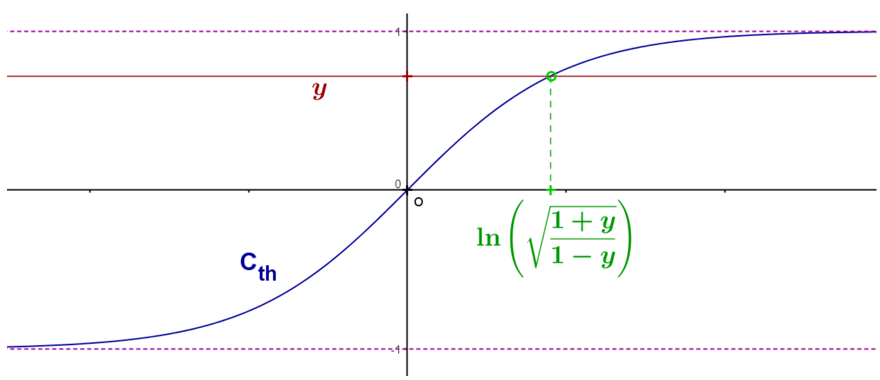
$$[\mathbf{T}(x) = y] \iff \left[\mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y}\right] \iff \left[2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right] \iff \left[x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\right]$$

Conclusion. Pour tout réel $y \in\ ]-1, 1[$, l'équation $\mathbf{T}(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$, qui est $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$

Interprétation. Le résultat précédent signifie que tout réel y strictement compris entre -1 et 1 admet un unique antécédent par la fonction $\mathbf{T}$ (qui est la fonction tangente hyperbolique, usuellement notée).

Graphiquement, cela signifie que toute droite horizontale d'équation $y = k$ avec $k \in\ ]-1, 1[$ coupe la courbe représentative de th en un unique point (cf graphe ci-dessous).

Dans cette situation, nous dirons que la fonction th **est une bijection de $\mathbb{R}$ dans** $]-1, 1[$.



Partie 2 - Quelques propriétés de la réciproque de T

On définit une fonction $\mathbf{A}$ sur $]-1,1[$ en posant :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \mathbf{A}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

9/ Démontrer que $\mathbf{A} \circ \mathbf{T} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, c'est à dire démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbf{A}\left(\mathbf{T}(x)\right) = x$$

Soit x un réel. On a :

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{T}(x)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}}{1-\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}}{\frac{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = x$$

Conclusion. $\mathbf{A} \circ \mathbf{T} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

10/ Etablir que :

$$\forall\, x \in I =]-1,1[, \quad \mathbf{A}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

D'après les théorèmes généraux, $\mathbf{A}$ est dérivable sur I, et pour tout réel x dans I on a :

$$\mathbf{A}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Conclusion. $\forall\, x \in I, \quad \mathbf{A}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

11/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $\mathbf{A}$.

D'après la question précédente, $\mathbf{A}$ est dérivable en 0. A ce titre, elle admet un DL à l'ordre 1 en 0, qui est :

$$\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(0) + x\mathbf{A}'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Or $\mathbf{A}(0) = 0$ et $\mathbf{A}'(0) = 1$ (question précédente).

Conclusion. $\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

12/ Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)}$

D'après le cours et la question précédente :

$$\forall\, x \in I,\ x \neq 0,\ \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)} = \frac{x + x\varepsilon_1(x)}{x + x\varepsilon_2(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_{1,2}(x) = 0$$

Ainsi :

$$\forall\, x \in I,\ x \neq 0,\ \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)} = \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_{1,2}(x) = 0$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{A}(x)}{\sin(x)}$

13/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in]-1,1[, \quad \mathbf{A}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{(1+x)^n + (-1)^{n+1}(1-x)^n}{(1-x^2)^n}\right)$$

Selon les théorèmes généraux, la fonction $\mathbf{A}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que :

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}'^{(n-1)}$$

Or : $\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Selon la question 1 : $\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + g(x)\right)$

On en déduit par linéarité de la dérivation que : $\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}^{(n-1)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(x)\right)$

Selon la question 3 : $\forall\, x \in I,\ \mathbf{A}^{(n-1)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n} + \dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}\right)$

La conclusion s'ensuit, par réduction au même dénominateur.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in]-1,1[, \quad \mathbf{A}^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{2}\left(\dfrac{(1+x)^n + (-1)^{n+1}(1-x)^n}{(1-x^2)^n}\right)$

Partie 3 - Tangente hyperbolique complexe

Dans cette partie, on cherche à étendre la définition de la fonction $\mathbf{T}$ à une fonction d'une variable complexe. L'objectif de la question 14 est de déterminer l'ensemble de définition de la fonction $z \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}$.

14/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0$$

Soit z un nombre complexe. On a :

$$\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^z = -\mathrm{e}^{-z} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{-z+\mathrm{i}\pi} \Longleftrightarrow z = -z + \mathrm{i}\pi \ \ [2\mathrm{i}\pi]$$

la dernière équivalence étant fournie par la question 2. On en déduit que :

$$\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \Longleftrightarrow 2z = \mathrm{i}\pi \ \ [2\mathrm{i}\pi] \Longleftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} \ \ [\mathrm{i}\pi]$$

Conclusion. Soit z un complexe. On a :

$$\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} \ \ [\mathrm{i}\pi]$$

On notera S l'ensemble des solutions de cette équation, et $\mathbf{D} = \mathbb{C} \backslash S$.

On peut à présent définir la fonction $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad \mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}$$

La notation $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ est choisie pour souligner le fait que cette fonction dépend d'une variable complexe.

15/ Etablir que la fonction $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ est périodique, de période $\mathrm{i}\pi$.

Soit $z \in \mathbf{D}$. Il est clair que $(z + \mathrm{i}\pi) \in \mathbf{D}$, ce qui rend légitime le calcul ci-dessous :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z + \mathrm{i}\pi) = \frac{\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\pi} - \mathrm{e}^{-z-\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-z-\mathrm{i}\pi}}$$

En observant judicieusement que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1$, on en déduit que :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z + \mathrm{i}\pi) = \frac{-\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{-\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = \mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z)$$

En résumé : $\forall z \in \mathbf{D},\ \mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z + \mathrm{i}\pi) = \mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z)$

Conclusion. La fonction $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ est périodique, de période $\mathrm{i}\pi$.

16/ Etablir que pour tout réel x tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{C}}\,(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\tan(x)$$

Soit x un réel tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Alors $\mathrm{i}x \in \mathbf{D}$ et on a :

$$\mathbf{T}_{\mathbb{C}}\,(\mathrm{i}\,x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(x)}{2\cos(x)} = \mathrm{i}\tan(x)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\,,\quad \mathbf{T}_{\mathbb{C}}\,(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\tan(x)$

17/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = 2$, et plus explicitement établir que :

$$[\mathbf{T}_{\mathbb{C}}(z) = 2] \Longleftrightarrow \left[z = \ln\left(\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \quad [\mathrm{i}\pi]\right]$$

Conclusion.

—- Problème 2 - Sur la piste de $\cos(2\pi/7)$ —-

Problématique. *Pour des raisons algébriques profondes, le réel* $\cos(2\pi/7)$*, loin d'être une valeur remarquable, est un nombre suffisamment "compliqué" pour que l'on ne puisse pas exprimer sa valeur exacte sous une autre forme que…* $\cos(2\pi/7)$ *! Faute de pouvoir en obtenir une valeur exacte, le but de cet exercice est d'établir une formule "simple" faisant intervenir ce réel. Pour y parvenir, on étudiera notamment quelques propriétés des nombres complexes de module 1.*

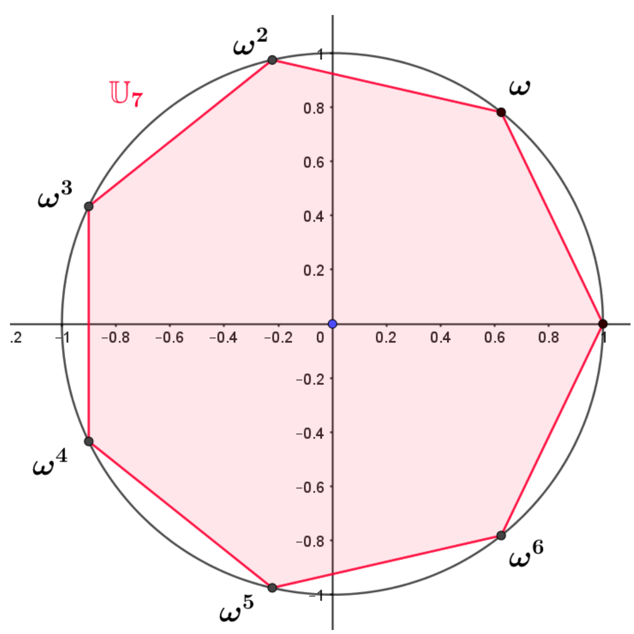
Dans ce problème, on pose :

$$\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/7} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Et on note :

$$\mathbb{U}_7 = \left\{\omega^k,\ k \in [\![\, 0, 6 \,]\!]\right\} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \mathbb{U}_7 = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^6\}$$

Les éléments de $\mathbb{U}_7$ sont les sommets d'un polygone régulier à 7 côtés (un heptagone) inscrit dans le cercle unité, représenté ci-contre.



Dans un premier temps, on étudie quelques propriétés des éléments de $\mathbb{U}_7$.

Dans un second temps, on établira une relation "simple" faisant intervenir le réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

Partie A - Quelques propriétés géométriques des éléments de $\mathbb{U}_7$

1/ Etablir que :

$$\omega^7 = 1$$

On a : $\omega^7 = \left(e^{2i\pi/7}\right)^7 = e^{2i\pi} = 1$. **Conclusion.** $\omega^7 = 1$

2/ **Centre de gravité de l'heptagone régulier.** Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k$ est géométrique de raison ω, avec $\omega \neq 1$. Par suite :

$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1 - \overbrace{\omega^7}^{=1}}{1-\omega} = 0$$

Conclusion. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$

Remarque : juste pour information, cette relation signifie que le centre de gravité de l'heptagone régulier est l'origine O du plan complexe.

3/ Soit (α, β) un couple de réels. Démontrer la **formule d'Euler généralisée** suivante :

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2ie^{i(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Soient α et β deux réels. On a : $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2}}{2i}$

D'où : $2ie^{i(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2}\right) = e^{2i\alpha/2} - e^{2i\beta/2}$

Conclusion. $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad 2ie^{i(\alpha+\beta)/2} \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$

4/ Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, 6 \,]\!], \quad \left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Soit $k \in [\![\, 0, 6 \,]\!]$. On a :

$\left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = \left|e^{2i(k+1)\pi/7} - e^{2ik\pi/7}\right| = \underbrace{\left|e^{2ik\pi/7}\right|}_{=1} \times \left|e^{2i\pi/7} - 1\right| = \left|e^{i\pi/7}\left(e^{i\pi/7} - e^{-i\pi/7}\right)\right|$

$$= \underbrace{\left|e^{i\pi/7}\right|}_{=1} \times \left|-2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = \underbrace{|-2i|}_{=2} \times \left|\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

la dernière égalité provenant de la positivité de $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (car $\frac{\pi}{7} \in [0,\pi]$.

Conclusion. $\forall k \in [\![0,6]\!], \quad \left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Partie B - A la recherche de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

Dans cette partie, on pose :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

5/ Etablir que : $A + B = -1$.

D'après la question 2 : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 \Longleftrightarrow 1 + A + B = 0 \Longleftrightarrow A + B = -1$

Conclusion. $A + B = -1$

6/ Etablir que :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$$

On a : $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ (puisque $\frac{8\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$)

D'où : $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Or $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ puisque $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$, et que la fonction sin est strictement décroissante sur $[\pi/2, \pi]$.

Il s'ensuit que : $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) > 0$

Conclusion. $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$

7/ Calculer AB.

On a : $AB = (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$

$$= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 = 2 + \underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}_{=0}$$

Conclusion. $AB = 2$

8/ Etablir que : $\mathrm{Im}(A) > 0$.

Notons que : $\mathrm{Im}(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Le réel $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est positif car $\frac{2\pi}{7}$ est dans $[0, \pi]$.

Et le réel $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ est strictement positif d'après la question 6.

Conclusion. $\mathrm{Im}(A) > 0$

9/ A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de A et B.

D'après ce qui précède, les complexes A et B satisfont le système $\begin{cases} A + B = -1 \\ AB = 2 \end{cases}$.

A ce titre, ils sont solutions de l'équation $X^2 + X + 2 = 0$. Or cette dernière équation possède évidemment deux racines complexes conjuguées : $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

On déduit alors de la question précédente que : $\boxed{A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \text{ et } B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}}$

Conclusion. $A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

10/ En déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Corollaire immédiat de la question précédente.