Colle 6 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Propriété** : la composée de deux applications injectives est injective.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Supposons f et g injectives.

Soient x et x' deux éléments de E. Alors :

$$[(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')] \Longrightarrow [g(f(x)) = g(f(x'))] \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} [x = x']$$

En résumé : $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$. Ce qui signifie que $g\circ f$ est injective.

Conclusion : si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.

Question de cours n^{0}2 — **Propriété** : la composée de deux applications surjectives est surjective.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Supposons f et g surjectives.

Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists\, y \in F,\ g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists\, x \in E,\ f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on obtient : $g(f(x)) = z$.

On a ainsi établi que : $\forall\, z \in G,\ \exists\, x \in E,\ (g\circ f)(x) = z$. Ce qui signifie que $g\circ f$ est surjective.

Conclusion : si f et g sont surjectives, alors $g\circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat des questions de cours 1 et 2. Si f et g sont bijectives, alors $g\circ f$ est bijective.

Question de cours n^{0}3 — **Théorème (implication 1)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.

f est bijective $\Longrightarrow$ il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f\circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g\circ f = \mathrm{id}_E$

Supposons f bijective.

Puisque f est bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent dans E par f, que nous noterons x_y.

On définit alors une application $g : F \longrightarrow E$ en posant pour tout élément y de F : $g(y) = x_y$ (on associe à y son unique antécédent par f).

Vérifions que $f\circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

Pour la première égalité : soit $y \in F$. Alors $(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ (puisque x_y est l'unique antécédent de y par f). Ainsi : $f\circ g = \mathrm{id}_F$.

Passons à la seconde égalité : soit $x \in F$. Alors $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = x$ (puisque, f étant bijective, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f). Ainsi : $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

Conclusion : si f est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f\circ g = \mathrm{id}_F$ et $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

Question de cours n^{0}4 — **Théorème (implication 2)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.

[Il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f\circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g\circ f = \mathrm{id}_E$] $\Longrightarrow$ f est bijective

Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f\circ g = \mathrm{id}_F$ et $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que : $f(x) = f(x')$. On a alors : $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g\circ f = \mathrm{id}_E$, on en déduit $x = x'$. Ce qui prouve que f est injective.

Soit y un élément de f. On a : $y = \mathrm{id}_F(y) = (f\circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y admet un antécédent par f (qui est $g(y)$). Puisque y est un élément arbitraire de F dans ce petit raisonnement, on en déduit que f est surjective.

L'application f étant injective et surjective, elle est bijective.

Conclusion : s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f\circ g = \mathrm{id}_F$ et $g\circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective.

Synthèse des questions de cours 3 et 4.

L'application f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \ \underline{\underline{\textbf{et}}}\ g \circ f = \mathrm{id}_E$$

QUESTION DE COURS N^{0}5 — **Propriété ("unicité de la réciproque")**. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une application $g_1 \in E^F$ telle que $f \circ g_1 = \mathrm{id}_F$ et $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E$.[*]

Montrons son unicité. A cette fin, supposons qu'il existe g_1 et $g_2 \in E^F$ telles que $f \circ g_1 = \mathrm{id}_F = f \circ g_2$ et $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E = g_2 \circ f$. Alors :

$$\begin{aligned} & (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) \qquad \textit{(associativité de la composition)} \\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{id}_E \circ g_2 = g_1 \circ \mathrm{id}_F \qquad \textit{(par hypothèse)} \\ \Longleftrightarrow\ & g_2 = g_1 \qquad \textit{(“l'identité est le neutre pour la composition”)} \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'unicité de g_1. **Conclusion**. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une application $g_1 \in E^F$ telle que $f \circ g_1 = \mathrm{id}_F$ et $g_1 \circ f = \mathrm{id}_E$

QUESTION DE COURS N^{0}6 — **Propriété**. Soit E un ensemble. Notons $\mathrm{Bij}\,(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. Avec ces notations, $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

① La composition des applications est associative (propriété générale du cours).

② Si f et g sont dans $\mathrm{Bij}\,(E)$, alors $(g \circ f) \in \mathrm{Bij}\,(E)$, puisque la composée de deux bijections est encore une bijection (corollaire des questions de cours 1 et 2).

③ L'application id_E est une bijection de E dans E, car c'est une involution de E.

④ Si f est dans $\mathrm{Bij}\,(E)$, alors f est une bijection de E dans E, et admet une bijection réciproque qui est également une bijection de E dans E. Ainsi : $f^{-1} \in \mathrm{Bij}\,(E)$. Et il est connu que : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E = f \circ f^{-1}$.

Bilan. L'ensemble $\mathrm{Bij}\,(E)$ est stable par composition (selon ②) ; l'identité de E est l'élément neutre pour la composition dans $\mathrm{Bij}\,(E)$ (selon ③) ; et tout élément f de $\mathrm{Bij}\,(E)$ admet un inverse (sa bijection réciproque f^{-1}) pour la composition dans $\mathrm{Bij}\,(E)$ (selon ④). En outre, la composition est associative (selon ①).

Conclusion. Pour les 4 raisons évoquées dans le paragraphe précédent, $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

Remarque*. Plus tard cette année, nous appellerons* ***permutation*** *de E une bijection de E dans E, et nous étudierons en détail le groupe des permutations de E (le groupe $(Bij(E), \circ)$ de cette question de cours). Ce groupe interviendra notamment dans la définition du déterminant d'une matrice carrée de taille quelconque, au second semestre.*

---

[*]. Selon la question de cours 3.

Banque d'exercices

Exercice 1. — (Une "pseudo-réciproque", 1). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que : $[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$

Exercice 2. — (Une "pseudo-réciproque", 2). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que : $[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$

Exercice 3. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y,\ 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

Exercice 4. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + \mathrm{i}z)^5 = (1 - \mathrm{i}z)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Exercice 5. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $(1 + \mathrm{j})^{600}$.

Exercice 6. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe.
On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b \end{aligned}$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Exercice 7. — (Racines carrées dans $\mathbb{C}$). Déterminer les racines carrées de $2 + 4\mathrm{i}$.

Banque d'exercices — Corrigés

Exercice 1. — (Une "pseudo-réciproque", 1). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$$

Supposons $g \circ f$ injective.

Soient x et x' deux éléments de E. Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que $x = x'$.

Finalement : $\forall\, (x, x') \in E^2,\ [f(x) = f(x')] \Longrightarrow [x = x']$. Ce qui signifie que f est injective.

Conclusion. $[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$.

Exercice 2. — (Une "pseudo-réciproque", 2). Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

Montrer que :

$$[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$$

Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse, il existe un élément x de E tel que : $g(f(x)) = z$. D'où $z \in g(F)$, ce qui signifie que g est surjective.

Ainsi : $[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$.

Exercice 3. — (In-ra-ta-ble !) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x - 3y,\ 2x + y) \end{array}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

Soit (X, Y) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $F(x, y) = (X, Y)$.

On a : $F(x,y) = (X,Y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x + y = X & (L_1) \\ 4x + 2y = Y & (L_2) \end{array} \right.$

Alors : $2(L_1) - (L_2) \Longleftrightarrow x = \dfrac{2X - Y}{2}$. Et : $3(L_2) - 4(L_1) \Longleftrightarrow y = \dfrac{3Y - 4X}{2}$.

En d'autres termes : $F(x,y) = (X,Y) \Longleftrightarrow (x,y) = \left(\dfrac{2X - Y}{2}, \dfrac{3Y - 4X}{2} \right)$.

On a ainsi établi que tout élément (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par F dans $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. L'application F est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{array}{rcl} F^{-1} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) & \longmapsto & \left(\dfrac{2X - Y}{2}, \dfrac{3Y - 4X}{2} \right) \end{array}$$

Exercice 4. — (Equation et racines de l'unité) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Soit z un complexe. On peut supposer dans les calculs qui suivent que $(1-\mathrm{i}z) \neq 0$, càd que $z \neq -\mathrm{i}$, car $-\mathrm{i}$ n'est pas solution de (E) (c'est une vérification immédiate). D'où :

$$(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5 \Longleftrightarrow \left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^5 = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right) \in \mathbb{U}_5 \Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![0;4]\!],\ \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/5}$$

Soit k un entier dans $[\![0;4]\!]$. On a :

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/5} \Longleftrightarrow 1+\mathrm{i}z = \mathrm{e}^{2ik\pi/5}(1-\mathrm{i}z) \Longleftrightarrow iz\left(1+\mathrm{e}^{2ik\pi/5}\right) = \mathrm{e}^{2ik\pi/5} - 1 \Longleftrightarrow iz = \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/5}-1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/5}+1}$$

$$\Longleftrightarrow iz = \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/5}\left(\mathrm{e}^{ik\pi/5} - \mathrm{e}^{-ik\pi/5}\right)}{\mathrm{e}^{ik\pi/5}\left(\mathrm{e}^{ik\pi/5} + \mathrm{e}^{-ik\pi/5}\right)} \Longleftrightarrow iz = \frac{2i\sin(k\pi/5)}{2\cos(k\pi/5)} \Longleftrightarrow z = \tan(k\pi/5)$$

Conclusion. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left[(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5\right] \Longleftrightarrow \left[\exists\, k \in [\![0;4]\!],\ z = \tan(k\pi/5)\right]$$

Exercice 5. — (Une propriété de $\mathbb{U}_3$) On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Calculer $(1+\mathrm{j})^{600}$.

Selon le cours : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_3} \omega = 0$. En particulier : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ (puisque : $\mathbb{U}_3 = \left\{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\right\}$).

Il s'ensuit que $1+\mathrm{j} = -\mathrm{j}^2$. Donc :

$$(1+\mathrm{j})^{600} = \left(-\mathrm{j}^2\right)^{600} = \mathrm{j}^{1200} = \left(\mathrm{j}^3\right)^{400} = 1^{400} = 1$$

Conclusion. $(1+\mathrm{j})^{600} = 1$

Exercice 6. — (Rotation dans le plan complexe). Soient θ un réel, et b un complexe.

On considère l'application R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie en posant :

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b$$

Montrer que l'application R est une bijection, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Soit $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } R \Longleftrightarrow R(z) = Z \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b = Z \Longleftrightarrow z = \frac{Z-b}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par R, qui est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(Z-b)$.

Conclusion. On déduit que R est bijective, et que sa bijection réciproque est $R^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$Z \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(Z-b)$$

Exercice 7. — (Racines carrées dans $\mathbb{C}$). Déterminer les racines carrées de $2+4\mathrm{i}$.

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe (avec a et b réels). On a :

$$z^2 = 2+4\mathrm{i} \iff a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 2 + 4\mathrm{i} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \text{(identification des parties réelles)} \\ 2ab = 4 & \text{(identification des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} & \text{(identification des modules)} \end{cases}$$

On déduit des première et troisième ligne que $a = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$ et $b = \pm\sqrt{\sqrt{5}-1}$. La seconde ($2ab = 4$) signifie que a et b sont de même signe, et permettent de conclure.

Conclusion. Les racines carrées de $2+4\mathrm{i}$ sont $\sqrt{1+\sqrt{5}} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-1}$ et $-\sqrt{1+\sqrt{5}} - \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-1}$.