Exercices 6 – Applications

Généralités : applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 1. — On considère l'application Jour : $E = \{\text{Dates de l'année 2024}\} \longrightarrow F = \{\text{lundi, mardi}, \ldots, \text{dimanche}\}$ qui à toute date de l'année 2024 associe le jour de la semaine correspondant. L'application Jour est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2. — L'application $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à tout complexe z associe son module est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 3. — On considère l'application len : $E = \{\text{chaînes de caractères}\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à toute chaîne de caractères associe sa longueur. L'application len est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4. — Soient E, F et G les ensembles suivants : $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{A, B, C, D\}$ et $G = \{+, *\}$.

1/ Construire une application $f_1 : E \longrightarrow F$ injective ; puis une application $f_2 : E \longrightarrow F$ non-injective. Peut-on construire une application surjective de E dans F ?

2/ Construire une application $g_1 : F \longrightarrow G$ surjective ; puis une application $g_2 : F \longrightarrow G$ non-surjective. Peut-on construire une application injective de F dans G ?

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels. On considère l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $D(P) = P'$.
Déterminer si l'application D est injective, surjective, bijective.

Exercice 6. — Soit E un ensemble quelconque. On considère l'application Comp : $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ qui à toute partie A de E associe son complémentaire $E \backslash A$.
Etablir que l'application Comp est bijective.

Exercice 7. — Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1/ $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, $n \longmapsto n+1$

2/ $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 2n+1$

3/ $f_3 : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(x)$

4/ $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$

5/ $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$

6/ $f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^3$

Exercice 8. — Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$

2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x + y, y)$

3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$

4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + 3y, x - 2y)$

5) $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, y + z, z)$

6) $f_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (y + z, x + z, x + y)$

Exercice 9. — **(Similitudes directes)** Soient a et b deux nombres complexes, a non nul. On considère l'application $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ d'écriture complexe $z \longmapsto az + b$.

1/ Etablir que S est bijective. 2/ A quelle(s) condition(s) sur a et b l'application S est-elle une involution ?

Exercice 10. — L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (3uv, u^3 + v^3) \end{aligned}$$

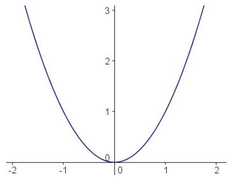
est-elle injective, surjective, bijective ?

Fonctions numériques injectives, surjectives, bijectives

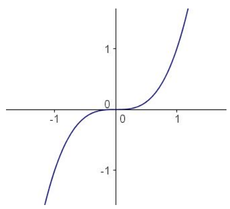
Exercice 11. — Dans chacun des exemples ci-dessous, on donne une fonction $f : E \longrightarrow F$, avec E et F des parties de $\mathbb{R}$. Dans chaque cas :

- ➤ déterminer si f est injective, surjective, bijective ;
- ➤ lorsque c'est possible, modifier l'ensemble de départ E et l'ensemble d'arrivée F pour obtenir une application bijective.

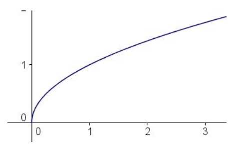
1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$



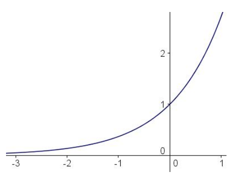
2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$



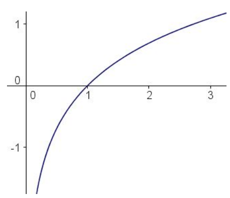
3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$



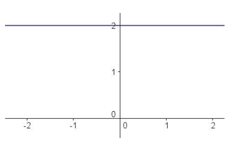
4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{array}$



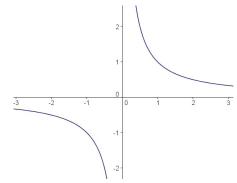
5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array}$



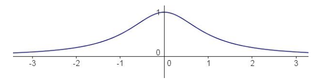
6) $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 \end{array}$



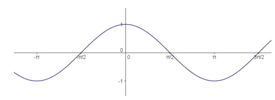
7) $f_7 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x \end{array}$



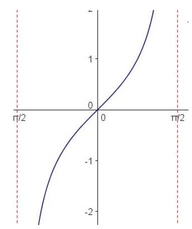
8) $f_8 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto 1/\left(x^2+1\right) \end{array}$



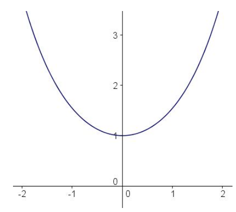
9) $f_9 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{array}$



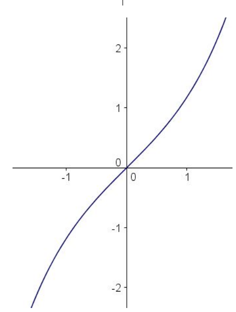
10) $f_{10} : \begin{array}{l}]-\pi/2;\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{array}$



11) $f_{11} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{ch}(x) \end{array}$



12) $f_{12} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{sh}(x) \end{array}$



Images directes, images réciproques

Définitions. Soit $f \in F^E$.

➢ L'**image de** f, notée $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(E)$ est la partie de F suivante :

$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\} \text{ ou } f(E) = \{y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}.$$

➢ Plus généralement, lorsque A est une partie de E, l'**image (directe) de** A **par** f, notée $f(A)$ est la partie de F suivante : $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$ ou $f(A) = \{y \in F,\ \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}$.

➢ Lorsque B est une partie de F, l'**image réciproque de** B **par** f, notée $f^{-1}(B)$ est la partie de E suivante : $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Exercice 12. — Déterminer l'image directe de $[\mathrm{e};+\infty[$ par la fonction ln ; puis celle de $[0;\pi]$ par la fonction sinus.

Exercice 13. — Déterminer l'image réciproque de $[-1;9]$ par la fonction carrée ; puis celle de $[-1;1]$ par cos.

EXERCICE 14. — Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

1) On considère A et B deux parties de E. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

2) On considère A' et B' deux parties de F. Montrer que : $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

EXERCICE 15. — Mêmes notations que dans l'exercice précédent.

1) Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

EXERCICE 16. — **Exercice classique** Soient E, F et G trois ensembles ; $f \in F^E$ et $g \in G^F$ deux applications. Montrer que :

1) $[(g\, o\, f)$ injective$] \Longrightarrow [f$ injective$]$;

2) $[(g\, o\, f)$ surjective$] \Longrightarrow [g$ surjective$]$;

3) $[(g\, o\, f)$ surjective $\wedge\, g$ injective$] \Longrightarrow [f$ surjective$]$;

4) $[(g\, o\, f)$ injective $\wedge\, f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ injective$]$.

EXERCICE 17. — Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ les deux applications définies par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f(k) = 2k \qquad et \quad g(k) = \begin{cases} k/2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \\ (k-1)/2 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1) Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et de g.

2) Calculer $g\, o\, f$ et $f\, o\, g$. Etudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité.

EXERCICE 18. — Soient E un ensemble, et $f \in E^E$ une application. On suppose que $f\, o\, f\, o\, f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 19. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

EXERCICE 20. — Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$[f \text{ injective}] \Longleftrightarrow [f \text{ surjective}]$$

EXTRAITS DE DS

EXERCICE 21. — **(Cadeau)** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, c'est à dire :

$$2\mathbb{N} = \{2k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$$

Etablir que $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

EXERCICE 22. — **(In-ra-ta-ble !)** Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x - 3y,\ 2x + y) \end{aligned}$$

est bijective. Puis donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

EXERCICE 23. — **(Un peu technique)** Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Montrer que f est bijective si et seulement si :

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(E),\ f(E \backslash A) = F \backslash f(A)$$

Exercice 24. — **(Application directe du cours, sur les complexes et les applications)** On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 - 1 \end{array}$

1/ L'application f est-elle injective ?

2/ Justifier que l'application f est surjective.

3/ Quels sont les antécédents de 7 par f ?

Exercice 25. — **(Numérotation des nombres rationnels)** * *Un ensemble E est dit **dénombrable** lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est à dire s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E ; cette bijection permet de "dénombrer" les éléments de E, ce qui justifie a posteriori la terminologie. On a par exemple déjà établi en cours que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Ce résultat pourra être utilisé au besoin ici, sans qu'il soit nécessaire de le redémontrer.*

*L'objectif principal de cet exercice est d'aller plus loin, et de prouver que **l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable**. Cette preuve comporte des étapes intermédiaires (notamment : établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable), et requiert l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein.*

Partie I — Démarrage en douceur

1/ Notons $E_1 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que E_1 est dénombrable.

2/ Notons E_2 l'ensemble des entiers naturels pairs, soit : $E = \{2k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E_2 est dénombrable.

Partie II — Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$, dénombrabilité de $\mathbb{Z}^2$

On définit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p, q) & \longmapsto & 2^p (2q + 1) \end{array}$$

3/ Montrer que φ est bien définie et qu'elle est injective.

4/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un entier N_0 tel que 2^{N_0} divise n, et 2^{N_0+1} ne divise pas n.

5/ En utilisant la question précédente, établir que φ est surjective.

6/ Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ; puis que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Partie III — Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

7/ Construire une application injective ("simple") de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

8/ On appelle **représentant irréductible** d'un nombre rationnel non nul r l'unique fraction irréductible p/q égale à r avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. † Nous conviendrons que le représentant irréductible de 0 est $0/1$.

a) Justifier brièvement que l'application $\psi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est injective. Est-elle surjective ?

b) Construire une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

On peut alors conclure en utilisant l'énoncé ci-dessous. ‡

Théorème (Cantor-Bernstein) — *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

---

*. Sans que ce soit complètement indispensable, il est préférable d'aborder ce problème avec de bonnes connaissances d'arithmétique, notamment pour la partie II.

†. Par exemple, le représentant irréductible de $10/15$ est $2/3$; celui de $-9/12$ est $(-3)/4$.

‡. Le théorème de Cantor-Bernstein peut être prouvé au niveau Sup, et c'était d'ailleurs l'objet d'un problème posé en DS en 2016 ; cette preuve est toutefois assez technique, et peu intuitive.