DM de Toussaint
(date limite : mardi 5 novembre 2024)

Exercice 1 — (Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$) On considère l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1/ Etablir que l'application f est bijective.

2/ En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3/ **Intermède - Valuation 2-adique.**[1] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle valuation 2-adique de n et on note $v_2(n)$ la plus grande puissance de 2 qui divise n.

Par exemple : $v_2(24) = 3$ car $2^3 = 8$ divise 24 ; mais $2^4 = 16$ ne le divise pas.

Montrer que tout entier entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit $n = 2^{v_2(n)} \times q$, avec q un entier naturel impair.

4/ Etablir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 2 — (Applications - Similitudes directes) Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq 0$, on définit une application $f_{a,b} \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az + b \end{aligned}$$

Une telle application $f_{a,b}$ est une **similitude directe** ; on note $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des similitudes directes :

$$\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C}) = \{f_{a,b},\ (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$$

1/ **Deux cas particuliers**.

a/ **Le cas** $a = 1$. Soit b un nombre complexe. Montrer que l'application $f_{1,b}$ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

b/ **L'application** $f_{1+\mathrm{i},2}$. Dans cet exemple, on pose $a = 1 + \mathrm{i}$ et $b = 2$, et on considère l'application $g = f_{1+\mathrm{i},2}$ qui est définie sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad g(z) = (1 + \mathrm{i})z + 2$$

Montrer que l'application g est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

1. Cette notion a déjà été introduite dans le TP4 d'informatique.

2/ Généralisation — Le groupe des similitudes directes.

a/ Justifier brièvement que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

b/ Soient (a,b) et $(a',b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout complexe z, calculer $(f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z)$. En déduire que l'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe.

c/ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. A l'aide des deux questions précédentes, établir que $f_{a,b}$ est une bijection, et que sa bijection réciproque est une similitude directe.

Exercice 3 — (Série alternée et Python).

Remarque préliminaire : à un moment dans cet exercice, il pourra vous être utile de savoir que la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *admet comme primitive la fonction arctan (arctangente), que* $\arctan(0) = 0$, *et que* $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. *Pour information, la fonction arctangente, et ses propriétés, seront étudiées lors de la semaine de rentrée.*

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left(S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

1/ Calcul de la limite de (S_n).

a/ Etablir que pour tout réel x et pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

b/ En déduire que pour tout n entier naturel on a :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

c/ Etablir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = 0$. En déduire la limite de (S_n).

2/ Python : calculs des sommes S_n.

a/ Ecrire une fonction $F(N)$ qui reçoit comme paramètre un entier N, et qui retourne la valeur de S_N.

b/ Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de saisir un entier N, et qui affiche la liste

$$L = [S_0, S_1, \ldots, S_N].$$

Exercice 4 — (Représentations binaires de listes)
Pour un entier naturel non nul n, on note $\mathbb{N}_n$ l'intervalle d'entiers $[\![0, n]\!]$.

On peut représenter les sous-ensembles de $\mathbb{N}_n$ par des listes de 0 et de 1.

Explicitement, si E est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$, sa **représentation** est une liste L_E de longueur $n+1$: l'élément situé à la position k de L_E vaut 1 si k $\in$ E et 0 sinon.

Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 3, 6\}$ de $\mathbb{N}_6$ est représenté par la liste [0,1,0,1,0,0,1].

QUESTION 1 : quelle est la représentation du sous-ensemble $\{2, 3, 4\}$ de $\mathbb{N}_5$?

QUESTION 2 : quelle est la représentation du sous-ensemble $\{1, 6\}$ de $\mathbb{N}_6$?

➤ On suppose donnés deux sous-ensembles E1 et E2 de $\mathbb{N}_{2024}$. On note respectivement L1 et L2 les représentations binaires de E1 et E2. Le code ci-dessous doit permettre de construire la liste LUN, qui est la représentation binaire de $E_1 \cup E_2$; on suppose dans ce code que les listes L1 et L2 ont déjà été construites (et sont définies "dans la machine").

Compléter le code pour qu'il réponde à la question.

```
LUN =[ ]
for k in range(  .....  # Ligne à compléter 1  (LAC1)
        LUN =LUN +[..... ] # Ligne à compléter 2  (LAC2)
```

LAC 1 :

LAC 2 :