MPSI – Colle 6 (4 au 8 novembre 2024) : Applications

Chapitre 6 : Applications

1 – Définitions et premiers exemples

Définition ("naïve"). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est un procédé qui permet d'associer à tout élément x de l'ensemble E un unique élément noté $f(x)$ de l'ensemble F, appelé **image** de x par f.

Définition ("la vraie"). Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est une partie Γ_f de $E \times F$ telle que : $\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x,y) \in \Gamma_f$. Ainsi, pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que le couple (x,y) appartienne à Γ_f est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f.

Exemples :; la conjugaison complexe ($z \mapsto \bar{z}$) est une application (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ; les fonctions usuelles sont des applications (en général d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; le fait d'associer à une fonction $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ sa dérivée $f' \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ est une application *etc.*..

Remarque : le point-clef est qu'une application n'est pas "qu'une formule". C'est la donnée d'un nom, d'un ensemble de définition (ou domaine), d'un ensemble d'arrivée (ou codomaine), et de la description du procédé qui à un élément de l'ensemble de définition associe son image. Une des notations ci-dessous doit donc être respectée lorsque l'on se réfère à une application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$$

Notation. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition. Soit E un ensemble. L'**identité de** E est l'application qui à tout élément x de E associe x. Elle est notée id_E.

Définition. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit la **composée de** f **et** g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe $g(f(x))$, ce que l'on écrit :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque : on a déjà observé (dans le cadre des fonctions) que **la composition des applications n'est pas commutative**. En revanche, la composition est associative :

Propriété. Soient E, F, G et H quatre ensembles, et $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in H^G$ trois applications. On a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propriété. Pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on a $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$ (l'identité est l'élément neutre pour la composition des applications).

2 – Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. On dit que f est **injective** (*resp.* **surjective**, **bijective**) si tout élément de F admet au plus un (*resp.* au moins un, *resp.* exactement un) antécédent par f dans E.

Traduction à l'aide de quantificateurs : soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$[f \text{ injective }] \iff \left[\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right]$$
$$[f \text{ surjective }] \iff [\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)]$$
$$[f \text{ bijective }] \iff [\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)]$$

Propriété. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont injectives (*resp.* surjectives), alors la composée $g \circ f$ est injective (*resp.* surjective).

Corollaire. Soient E, F et G trois ensembles ; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors la composée $g \circ f$ est bijective.

3 – Bijections réciproques

Théorème. Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \ \underline{\underline{\textbf{et}}}\ g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Propriété, définition et notation. Lorsque f est bijective, l'application g du théorème ci-dessus est **unique**, appelée **bijection réciproque** de f, notée f^{-1}.

Propriétés des bijections réciproques. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition. Soit E un ensemble. Une **involution** de E est une application f de E dans E telle que : $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Propriété. Soit E un ensemble. Toute involution de E est bijective, et est sa propre bijection réciproque.

4 – Ensembles équipotents et dénombrables

Définition. Deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection entre E et F. On le note $E \sim F$.

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont équipotents puisque la fonction exponentielle induit une bijection du premier ensemble vers le second.

Propriété. La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Définition. Un ensemble E est **dénombrable** si E et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exemples : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables ; $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Questions de cours

➤ **Propriété**. La composée de deux applications injectives est injective.

➤ **Propriété**. La composée de deux applications surjectives est surjective.

➤ **Théorème** (implication 1). Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si f est bijective alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

➤ **Théorème** (implication 2). Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective.

➤ **Propriété ("unicité de la réciproque"**. Si $f \in F^E$ est bijective, alors il existe une unique application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

➤ **Propriété**. Soit E un ensemble. Notons $\mathrm{Bij}\,(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. Avec ces notations, $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe.

Objectifs de la semaine :

➤ Connaître son cours, et en particulier les **définitions "d'inj-surj-bijective"** (avec des phrases et avec des quantificateurs) pour établir qu'une application possède (ou non) l'une de ces propriétés.

➤ Se souvenir que pour montrer la non-injectivité ou la non-surjectivité, un "contre-exemple" suffit (voir par exemple exercices 1, 2 et 11 de la feuille 6 de TD).

➤ Savoir traiter l'exercice "in-ra-ta-ble" suivant : montrer que l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (4x - 3y, 2x + y) \in \mathbb{R}^2$ est bijective, et donner l'expression de sa bijection réciproque f^{-1} (cf banque d'exercices).