Chapitre 7 — Fonctions circulaires réciproques

Préambule. L'objet de ce chapitre est de définir les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques : les fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente.

Table des matières

1. Fonctions à valeurs réelles bijectives

Propriété 1.1 - Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Preuve. EN CLASSE.

Exemple : la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 1.2 - La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

Preuve. EN CLASSE.

Propriété 1.3 - La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.

Remarque : arrêtez-vous deux secondes pour vous demander pourquoi l'énoncé ci-dessus n'a aucune chance de tenir si l'on remplace "impaire" par "paire" !

Preuve. EN CLASSE.

Propriété 1.4 - Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$$

Preuve. EN CLASSE.

Les 4 propriétés ci-dessus sont des outils fort pratiques pour définir et étudier les réciproques des fonctions trigonométriques ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2. Fonctions trigonométriques réciproques

2.1. **La fonction arccosinus.** La fonction cosinus réalise une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arccosinus** et est notée **arccos** (plutôt que $\cos^{-1}$, notation que vous avez sans doute déjà vue sur vos calculatrices).

La fonction arccosinus est "explicitement" donnée par la construction de "g" dans le théorème **??** page **??** du chapitre précédent. Précisément :

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos} : & [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [0;\pi] \\ & & & \text{de l'équation } \cos(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (attention aux intervalles !) :

$$\boxed{[\forall\, x \in [-1;1]\,,\ \cos(\arccos(x)) = x] \wedge [\forall\, x \in [0;\pi]\,,\ \arccos(\cos(x)) = x]}$$

Quelques valeurs : $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais **attention** : $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Propriété 2.1 - La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Preuve. EN CLASSE.

Propriété 2.2 - La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, et : $\forall\, x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Preuve. EN CLASSE.

Remarque. La propriété précédente ne dit rien sur la dérivabilité (ou non) de la fonction arccos en ± 1. De fait, arccos n'est dérivable ni en -1, ni en 1. Une preuve de cette affirmation repose sur une propriété que nous verrons ultérieurement (le théorème des accroissements finis). Un argument (qui n'est pas une preuve rigoureuse) graphique consiste à observer que la courbe représentative de la fonction arccos possède aux points d'abscisses -1 et 1 des demi-tangentes verticales.

Corollaire 2.1 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arccos).

$$\forall\, h \in]-1,1[,\ \arccos(h) = \frac{\pi}{2} - h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Preuve. EN CLASSE.

2.2. **La fonction arcsinus.** La fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée **arcsin**. La fonction arcsinus est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsin} : & [-1;1] & \longrightarrow & [-\pi/2;\pi/2] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [-\pi/2;\pi/2] \\ & & & \text{de l'équation } \sin(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-attention aux intervalles !) :

$$\boxed{[\forall\, x \in [-1;1]\,,\ \sin(\arcsin(x)) = x] \wedge [\forall\, x \in [-\pi/2;\pi/2]\,,\ \arcsin(\sin(x)) = x]}$$

Quelques valeurs : $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais attention : $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Propriété 2.3 - La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Preuve. EN CLASSE.

Propriété 2.4 - La fonction arcsin est impaire.

Preuve. EN CLASSE.

Propriété 2.5 - La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, et : $\forall\, x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Preuve. EN CLASSE.

Remarque. La propriété précédente ne dit rien sur la dérivabilité (ou non) de la fonction arcsin en ± 1. De nouveau, nous pourrons prouver que la fonction arcsin n'est dérivable ni en -1, ni en 1.

Corollaire 2.2 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arcsin).

$$\forall\, h \in]-1, 1[,\ \arcsin(h) = h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

Preuve. EN CLASSE.

Remarque. On peut observer (ce serait même un crime de ne pas le faire !) que les fonctions arccos et arcsin ont la même dérivée, au signe près. Une application de cette observation est la question standard suivante.

Exercice classique. Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Preuve. EN CLASSE.

2.3. **La fonction arctangente.** La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée **arctangente** et est notée **arctan** (plutôt que $\tan^{-1}$).

La fonction arctangente est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & & & \text{de l'équation } \tan(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-re-attention aux intervalles !) :

$$\left[\forall\, x \in \mathbb{R},\ \tan\left(\arctan\left(x\right)\right) = x\right] \wedge \left[\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \arctan\left(\tan\left(x\right)\right) = x\right]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$; $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

$\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais, attention (ce n'est plus une surprise) : $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

PROPRIÉTÉ 2.6 - La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PREUVE. EN CLASSE.

PROPRIÉTÉ 2.7 - La fonction arctan est impaire.

PREUVE. EN CLASSE.

PROPRIÉTÉ 2.8 - La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

PREUVE. EN CLASSE.

COROLLAIRE 2.3 - (DL à l'ordre 1 en 0 de arctan).

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ \arctan(h) = h + h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

PREUVE. EN CLASSE.

On achève ce paragraphe consacré à la fonction arctangente avec une propriété remarquable de cette dernière.

EXERCICE CLASSIQUE. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)$

où $\mathrm{sgn}(x)$ est égal à 1 si $x > 0$, et égal à -1 si $x < 0$.

PREUVE. EN CLASSE.

2.4. **Bilan sur les fonctions circulaires réciproques.**

➤ <u>**La fonction arccosinus (arccos)**</u>.

arccos est **définie** sur $[-1;1]$ par : $\begin{aligned} \arccos : [-1;1] &\longrightarrow [0;\pi] \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$

(où y : unique solution dans $[0;\pi]$ de $\cos(y) = x$).

La fonction arccos est **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $]-1;1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1.

De plus : $\forall\, x \in\ ]-1;1[\ ,\ \arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1;1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arccos}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, et $\mathscr{C}_{\text{arccos}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[-1;0]$ (*resp.* sur $[0;1]$).

x	-1		1
$\arccos' x$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$\arccos x$	π	$\searrow$	0

➤ <u>**La fonction arcsinus (arcsin)**</u>.

arcsin est **définie** sur $[-1;1]$ par : $\begin{aligned} \arcsin : [-1;1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$

(où y : unique solution dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ de $\sin(y) = x$).

La fonction arcsin est **impaire**, **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $]-1;1[$, et **n'est pas dérivable** en 1, ni en -1.

De plus : $\forall\, x \in\ ]-1;1[\ ,\ \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$.

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arcsin}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathscr{C}_{\text{arcsin}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $[0;1]$ (*resp.* sur $[-1;0]$).

x	-1		0		1
$\arcsin' x$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

➤ **La fonction arctangente (arctan)**.

arctan est **définie** sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{rl} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto y \end{array}$

(où y : unique solution dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $\tan(y) = x$).

La fonction arctan est **impaire**, **dérivable** (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall\, x \in\, \mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus elle est **bornée** (entre $-\pi/2$ et $\pi/2$).

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, et $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ est située au-dessus (*resp.* en-dessous) de cette tangente sur $\mathbb{R}_-$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_+$).

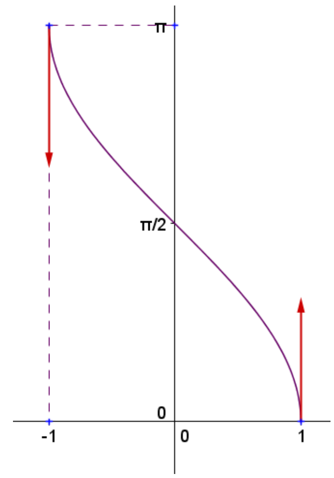
La courbe $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$ admet au voisinage de $+\infty$ (*resp.* de $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = \pi/2$ (*resp.* $y = -\pi/2$).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan' x$		$+$	
$\arctan x$	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$

➤ On achève ce paragraphe par les courbes représentatives des fonctions circulaires réciproques.

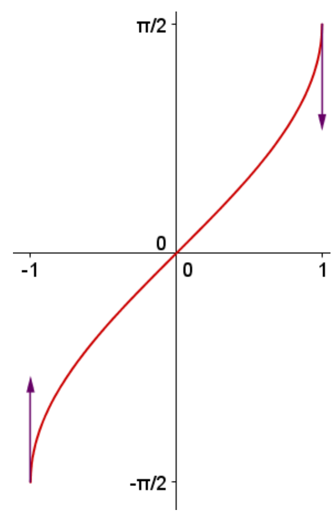
Arccosinus (arccos)

x	-1		1
$\arccos' x$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$\arccos x$	π	$\searrow$	0



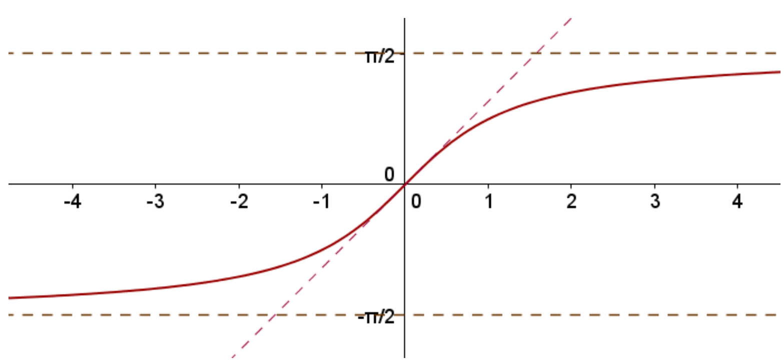
Arcsinus (arcsin)

x	-1		0		1
$\arcsin' x$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$



Arctangente (arctan)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan' x$			$+$		
$\arctan x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\pi/2$



3. Epilogue

3.1. Exercice classique : $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{4}\right)=\arctan\left(\frac{7}{11}\right)$.

Preuve. EN CLASSE (cours ou TD).

3.2. Somme d'une série.

Le but de l'exercice ci-dessous est de calculer :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left[\sum_{p=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right]$$

1/ Soit p un entier naturel. Calculer : $\delta_p=\arctan(p+1)-\arctan(p)$

2/ Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$

Calculer S_n, puis la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Preuve. EN CLASSE (cours ou TD).

3.3. Formule de Machin. Exercice — (Formule de Machin).[1]

1/ Soient x et y deux réels tels que $0<x<y$. Montrer que : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2/ Calculer $A=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.

3/ Montrer que : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Preuve. EN CLASSE (cours ou TD).

1. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).