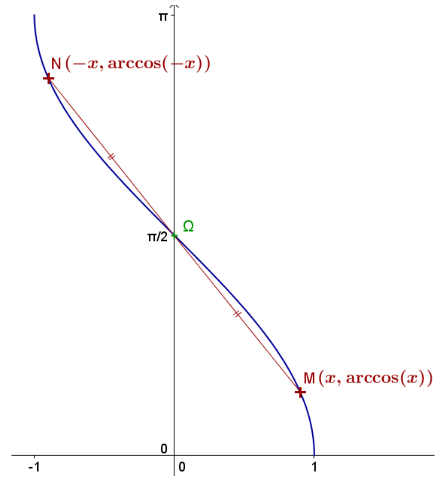
Corrigés des exercices 7 – Applications & Fonctions circulaires réciproques

Exercice 1. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Interprétation graphique. *Le point de coordonnées* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *est le centre de symétrie de la courbe représentative de arccos (voir ci-contre).*



Posons pour tout réel $x \in [-1;1]\,,\quad f(x) = \arccos(x) + \arccos(-x)$.
La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout réel $x \in]-1,1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-(-1)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $]-1,1[$, égale à $f(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = \pi$.

En résumé : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = \pi$.

Pour fermer les crochets, on peut observer que : $f(1) = \arccos(1) + \arccos(-1) = 0 + \pi = \pi$ et $f(-1) = f(1)$ puisque f est paire.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Exercice 2. — Prouver que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Et que peut-on dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x < 0$?

Pour tout réel x strictement positif, posons : $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Selon les TG, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Autrement écrit : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\qquad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par un raisonnement analogue, ou en utilisant le fait que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est impaire, on peut établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion. En résumé : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\qquad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{|x|}{x} \times \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Cf cours.

Exercice 4. — Etablir que : $\forall\, x \in [0,1],\ \arcsin(x) \geqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arcsin est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $[0,1]$.*

Pour tout réel x dans $[0,1]$, on pose : $f(x) = \arcsin(x) - x$. La fonction f est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout réel $x \in [0,1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

Il s'ensuit que f' est positive sur $[0,1[$. On en déduit que f est croissante sur $[0,1]$ (en utilisant la continuité de f sur $[0,1]$ pour fermer le crochet).

Puisqu'il est par ailleurs immédiat que $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $[0,1]$.

Conclusion. $\forall\, x \in [0,1],\ \arcsin(x) \geqslant x$

Exercice 5. — Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \arctan(x) \leqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arctan est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation $y = x$) sur $\mathbb{R}_+$.*

Cf cours : on peut procéder comme précédemment (via une étude de fonction), ou utiliser la concavité de arctan sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. — Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\sin(\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1,1]$. On a : $\sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1$.

D'où : $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$. D'où : $|\sin(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2}$.

Il reste à voir que $\sin(\arccos(x))$ est positif puisque $\arccos(x)$ appartient à $[0,\pi]$, pour conclure que : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1],\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

2/ $\cos(\arcsin(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1,1]$. On a : $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$.

D'où : $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. D'où : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$.

Il reste à voir que $\cos(\arcsin(x))$ est positif puisque $\arcsin(x)$ appartient à $[-\pi/2,\pi/2]$, pour conclure que : $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

3/ $\cos(2\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1,1]$. On a : $\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1],\ \cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$

4/ $\cos(2\arcsin(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1,1]$. On a : $\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1],\ \cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$

5/ $\sin(2\arccos(x))$

Soit x un réel quelconque dans $[-1,1]$. On a : $\sin(2\arccos(x)) = 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1],\ \sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$

6/ $\cos\left(2\arctan(x)\right)$

Soit x un réel quelconque. On a : $\cos\left(2\arctan(x)\right) = 2\cos^2\left(\arctan(x)\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\left(\arctan(x)\right)} - 1 = \dfrac{2}{1+x^2} - 1.$

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos\left(2\arctan(x)\right) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

7/ $\sin\left(2\arctan(x)\right)$

Soit x un réel quelconque. On a : $\sin\left(2\arctan(x)\right) = \tan(2\arctan(x)) \times \cos(2\arctan(x))$.

Or : $\tan(2\arctan(x)) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ (duplication pour la tangente) et $\cos\left(2\arctan(x)\right) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ selon la question précédente.

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin\left(2\arctan(x)\right) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

8/ $\tan\left(2\arcsin(x)\right)$

Soit x un réel de $[-1,1] \setminus \left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. On a :

$$\tan\left(2\arcsin(x)\right) = \frac{\sin\left(2\arcsin(x)\right)}{\cos\left(2\arcsin(x)\right)} = \frac{2\sin\left(\arcsin(x)\right)\cos\left(\arcsin(x)\right)}{\cos\left(2\arcsin(x)\right)} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

Conclusion. $\forall\, x \in [-1,1] \setminus \left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ \tan\left(2\arcsin(x)\right) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

Exercice 7. — Etablir que : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Cf cours.

Exercice 8. — **Formule de Machin.** *

1/ Calculer $A = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

2/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

3/ Montrer que : $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Corrigé.

1) On a : $\tan\left(2\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \dfrac{2/5}{1-(1/5)^2} = \dfrac{2/5}{24/25} = \dfrac{5}{12}$.

D'où : $\tan\left(4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \tan\left(2\times 2\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \dfrac{5/6}{1-(5/12)^2} = \dfrac{5/6}{119/144} = \dfrac{120}{119}$.

On en déduit que : $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) = \arctan\left(\dfrac{120}{119}\right)\ [\pi]$.

Puisque $1/5$ est strictement compris entre 0 et 1, son image par la fonction arctangente appartient à l'intervalle $]0,\pi/4[$; par suite $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) \in\ ]0,\pi[$.

*. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).

Puisque $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) = \arctan\left(\dfrac{120}{119}\right)$ $[\pi]$, et que les deux réels intervenant dans cette congruence appartiennent au même intervalle $]0,\pi[$, on peut conclure qu'ils sont égaux.

$$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)}.$$

2) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

D'après la formule d'addition pour la tangente, on a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\right) = \frac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y-x}{y+x}}{1 - \dfrac{x}{y} \times \dfrac{y-x}{y+x}} = \frac{\left(\dfrac{x(y+x)+(y-x)y}{y(y+x)}\right)}{\left(\dfrac{y(y+x)-x(y-x)}{y(y+x)}\right)} = \frac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{y(y+x)}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{y(y+x)}\right)} = 1.$$

D'autre part : $\tan(\pi/4) = 1$.

On en déduit que : $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[\pi]$.

Les hypothèses faites sur les réels x et y permettent alors d'affirmer que les réels $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{y-x}{y+x}$ sont strictement compris entre 0 et 1. Donc les images par la fonction arctangente de ces deux derniers réels appartiennent à l'intervalle $]0,\pi/4[$; par suite leur somme est dans l'intervalle $]0,\pi/2[$, et à plus forte raison : $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) \in \ ]0,\pi\,[$.

Puisque $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[\pi]$ et que les deux réels intervenant dans cette congruence appartiennent au même intervalle $]0,\pi[$, on peut conclure qu'ils sont égaux.

$$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ [0 < x < y] \Longrightarrow \left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}\right]}.$$

3) D'après la relation de la question 2, appliquée à $x = 119$ et $y = 120$ on a :

$$\arctan\left(\frac{119}{120}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs : $\arctan\left(\dfrac{119}{120}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{120}{119}\right)$.[†] D'où : $\arctan\left(\dfrac{119}{120}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

On déduit de ce qui précède que : $\dfrac{\pi}{2} - 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi : $\boxed{4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$.

Extraits de DS

Exercice 9. — **(Ca-deau !).** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan\left(x^3\right)$. Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

La fonction cube réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et la fonction arctangente réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2;\pi/2[$.

Leur composée est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2;\pi/2[$.

Conclusion. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2;\pi/2[$.

†. Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x)$.

Exercice 10. — **(Tangente et Arctangente).**

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

Soit (a, b) un couple de réels tels que $a \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $a - b \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

2/ Etablir que pour tout entier naturel n on a : $\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$

Soit n un entier naturel. On a d'une part :

$$\tan\left(-\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)\right) = -\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)\right) = -\frac{1}{n^2+3n+3}$$

D'autre part, selon la question 1 :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1}} = \frac{\dfrac{-1}{n^2+3n+2}}{\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}} = -\frac{1}{n^2+3n+3}$$

On en déduit que : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right) = \tan\left(-\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)\right)$.

Par suite : $\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right) \quad [\pi]$

Pour "faire disparaître le $[\pi]$", il reste à observer que les termes de gauche et de droite de cette relation sont deux réels de l'intervalle $]-\pi/2, 0]$, qui est de longueur strictement inférieure à π.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$

3/ En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$ en fonction de N ; puis la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Soit N un entier naturel. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\left[\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{N+2}\right)$$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{N+2}\right)$. D'où : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 11. — **(Cosinus et arccosinus).**

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{(n^2-1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

Même principe que dans l'exercice précédent.

EXERCICE 12. — **(ARCSINUS).**

1/ On pose $A(x) = \cos(\arcsin(x))$. Pour quelles valeurs de x l'expression $A(x)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs. Simplifier $A(x)$ pour tout réel x de D.

Soit x un réel compris entre -1 et 1. On a : $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$.

D'où : $\forall x \in [-1,1],\ |\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$.

Pour se débarrasser des valeurs absolues, il reste à observer que : $\arcsin([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent : $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$.

Conclusion. $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$$

D'une part : $\boxed{\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12} \quad (\spadesuit)}$

D'autre part, d'après la formule d'addition pour le sinus, on a :

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$
$$= \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Or, d'après la question précédente, on a : $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Et : $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

On en déduit que : $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{8}}{3}$

D'où : $\boxed{\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12} \quad (\clubsuit)}$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que :

$$\left[\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\ [2\pi]\right]$$
$$\vee \left[\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\ [2\pi]\right] \quad (\heartsuit)$$

Pour conclure, on commence par observer que : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par ailleurs : $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, car $1/3$ et $1/4$ sont compris entre 0 et $1/2$, et que $\arcsin\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) + \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. D'où : $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

En particulier, $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$ appartiennent tous deux au segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conclusion. $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$

Exercice 13. — **Une fonction bijective.** On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ en posant pour tout réel x de I : $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1/ Démontrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

3/ Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x} \\ \\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$

4/ Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J \backslash \{1\}$ et établir que :

$$\forall x \in J \backslash \{1\}, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Corrigé. 1) La fonction f est strictement croissante (et positive) sur I, puisque c'est l'inverse d'une fonction strictement décroissante (et positive) sur I.[‡]

En outre, f est continue sur I (essentiellement car la fonction cos l'est, et qu'elle ne s'annule pas sur I).

La fonction f étant strictement monotone et continue, elle réalise une bijection de I sur $f(I) = \left[f(0), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ c'est-à-dire sur $\left[1, \sqrt{2}\right]$.

Conclusion : f réalise une bijection de I dans $J = \left[1, \sqrt{2}\right]$.

2) Comme une fonction (à valeurs réelles) bijective et sa bijection réciproque ont la même monotonie, on peut affirmer que f^{-1} est strictement croissante sur J.

3) Soit x un réel appartenant à $J = \left[1, \sqrt{2}\right]$.

Alors : $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ d'où : $\dfrac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x$. Et puisque x est non nul ($0 \notin J$), on peut prendre les inverses des termes de cette égalité pour obtenir :

$$\boxed{\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \qquad (\spadesuit)}$$

En outre, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :

$$\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Or, puisque $x \in J$, on a $f^{-1}(x) \in I = [0, \pi/4]$; la fonction sinus étant positive sur cet intervalle, on a donc

$$\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}$$

En utilisant ($\spadesuit$), on en déduit que :

$$\boxed{\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

Le réel x étant un réel arbitraire de J dans le raisonnement précédent, on peut affirmer que :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad \begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x} \\ \\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}}$$

‡. On peut bien sûr justifier la stricte croissance par l'étude du signe de f', égale à $\sin / \cos^2$ dans le présent cas.

4) D'après la propriété relative à la dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction f^{-1} est dérivable en tout réel $f(a)$ tel que $f'(a)$ ne s'annule pas. Or dans cet exercice : $f' = \sin / \cos^2$. Donc f' ne s'annule qu'en 0. Il s'ensuit que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\}$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]1, \sqrt{2}]}$.

Pour tout réel $y \in\ ]0, \pi/4]$, on a : $\left(f^{-1}\right)'(f(y)) = \dfrac{1}{f'(y)}$.

D'où : $\left(f^{-1}\right)' \left(\dfrac{1}{\cos(y)}\right) = \dfrac{\cos^2(y)}{\sin(y)} = \cos^2(y) \times \dfrac{1}{\sin(y)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos(y)}\right)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}}$

Soit : $\left(f^{-1}\right)' \left(\dfrac{1}{\cos(y)}\right) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos(y)}\right)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos(y)}\right)^2}}}$

Par conséquent, pour tout réel $x \in\ ]1, \sqrt{2}]$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \setminus \{1\}, \text{ et} : \forall x \in J \setminus \{1\},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

Exercice 14. — **Equation.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E)} : \qquad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

Indication : mais quelles sont donc les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$?

Comme l'énoncé le suggère, on pose : $X = \tan(x)$. L'équation (E) se réécrit alors : $1 + X + X^2 + X^3 = 0$. Les racines de cette équation sont les racines quatrièmes de l'unité sauf 1, c'est-à-dire : -1 et $\pm \mathrm{i}$.

En revenant à la variable initiale, il ne reste donc plus que le cas : $\tan(x) = -1$, puisque la fonction tangente est à valeurs réelles. Or : $\tan(x) = -1 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Conclusion. Les solutions de (E) sont les réels $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 15. — **(Dérivées successives de arctan, problème 1 novembre 2023).**

1/ Question préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x - \mathrm{i})^7 - (x + \mathrm{i})^7 = 0$$

Soit x un complexe. On a :

$$\begin{aligned}
&(x - \mathrm{i})^7 - (x + \mathrm{i})^7 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x - \mathrm{i})^7 = (x + \mathrm{i})^7 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right)^7 = 1 \qquad \text{(car } -\mathrm{i} \text{ n'est pas solution de l'équation)} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_7 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k \in [\![0, 6]\!],\ \frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k \in [\![0, 6]\!],\ x - \mathrm{i} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}(x + \mathrm{i}) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k \in [\![0, 6]\!],\ x(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}) = \mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}\right)
\end{aligned}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![1,6]\!],\ \ x = \mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![1,6]\!],\ \ x = \mathrm{i}\frac{2\cos\left(\dfrac{k\pi}{7}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{k\pi}{7}\right)}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![1,6]\!],\ \ x = -\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{7}\right)$$

Conclusion. $\left((x-\mathrm{i})^7 - (x+\mathrm{i})^7 = 0\right) \iff \left(\exists\, k \in [\![1,6]\!],\ \ x = -\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right)$

Partie 1 - Une relation de récurrence

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$$

D'après le cours, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) = 0$$

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x, notons :

$$g(x) = 1+x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = g(x)\arctan'(x)$$

D'après la question précédente, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1$.

Il s'ensuit que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = 0 \qquad (\spadesuit)$.

Or, selon la formule de Leibniz, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} g^{(k)}(x)(\arctan')^{(n+1-k)}(x)$.

Puisqu'il est clair que $g^{(k)}$ est identiquement nulle pour tout entier $k \geqslant 3$, on en déduit que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{2}\binom{n+1}{k} g^{(k)}(x)(\arctan')^{(n+1-k)}(x)$$

Par suite :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h^{(n+1)}(x) = (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) \quad (\clubsuit)$$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ *à partir de celles de* $\arctan^{(n+1)}$ *et de* $\arctan^{(n)}$*. Puisque l'on connaît* $\arctan^{(0)}$ *et* $\arctan^{(1)}$*, on peut donc en déduire* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(3)}$ *à partir de* $\arctan^{(1)}$ *et* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(4)}$*...*

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ *par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.*

Partie 2 - Formules explicites des dérivées successives de arctan

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-a\}\,,\ g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x \neq -a$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Copier-coller de la preuve faite en classe pour la dérivée n-ème de $\dfrac{1}{1-x}$.

*On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe** a.*

*On **admettra** également que pour tout réel x, on a :*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}} - \frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\,\mathrm{i}}{2(1+x^2)^{n+1}}\, P_{n+1}(x) \qquad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}$$

Soit x un réel, et soit n un entier naturel. On a : $\arctan^{(n+1)}(x) = \left(\arctan'\right)^{(n)}(x)$.

Or : $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(\dfrac{1}{x+\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}\right)$.

Il s'ensuit, d'après la question 4, que :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{(-1)^n\, n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n\, n!\,\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{(x+\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

Conclusion. $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$,

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\,\mathrm{i}}{2(1+x^2)^{n+1}}\, P_{n+1}(x) \qquad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}$$

6/ "Le cas impair" : calcul de $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{2n+1} - (x+\mathrm{i})^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k \left((-1)^k - 1\right) x^{2n+1-k}$$

Selon la formule du binôme de Newton :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-\mathrm{i})^k\, x^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k x^{2n+1-k}$$

Conclusion. $P_{2n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left((-1)^k - 1\right) \mathrm{i}^k x^{2n+1-k}$

b/ Déduire de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}^{2p+1}x^{2(n-p)}$$

D'après la question précédente, et en observant que $\left((-1)^k - 1\right)$ est nul lorsque k est pair (et vaut -2 lorsque k est impair), on a :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-2)\,\mathrm{i}^{2p+1}x^{2(n-p)}$$

Conclusion. $P_{2n+1}(x) = -2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}^{2p+1}x^{2(n-p)}$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}x^{2(n-p)}$$

D'après les questions 5 et 6b, on a :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(-1)^{2n}\,(2n)!\,\mathrm{i}}{2(1+x^2)^{2n+1}} \times \left(-2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}^{2p+1}x^{2(n-p)}\right)$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = -\frac{(2n)!\,\mathrm{i}}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\,\mathrm{i}x^{2(n-p)}$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p x^{2(n-p)}$$

Conclusion. $\arctan^{(2n+1)}(x) = \dfrac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}x^{2(n-p)}$

d/ **Application**. Vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7}\left(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1\right)$$

Il suffit d'appliquer la question précédente, avec $n = 3$.

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\operatorname{cotan}\left(-\dfrac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in [\![1, 6]\!]$.

On a :

$$\left(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0\right) \iff \arctan^{(7)}(x) = 0 \iff \left((x-\mathrm{i})^7 - (x+\mathrm{i})^7 = 0\right)$$

La conclusion provient de cette équivalence, et de la question 1.

7/ **"Le cas pair" : calcul de** $\arctan^{(2n)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Etablir que :

$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}}\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{2p+1}x^{2(n-p)-1}$$

Il "suffit" d'adapter les calculs faits dans les questions 6-a, 6-b et 6-c.