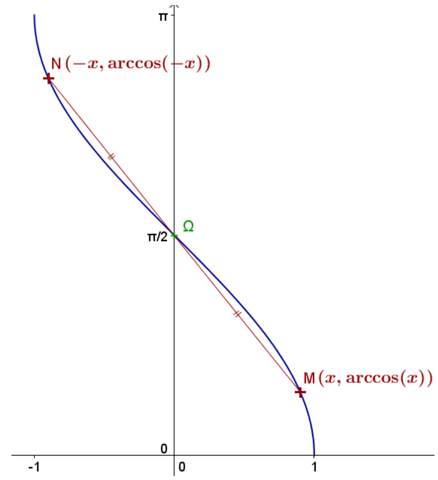
EXERCICES 7 – APPLICATIONS & FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

EXERCICE 1. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

Interprétation graphique. *Le point de coordonnées* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *est le centre de symétrie de la courbe représentative de arccos (voir ci-contre).*

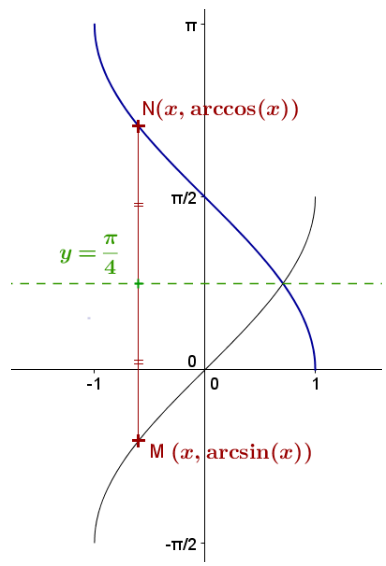


EXERCICE 2. — Prouver que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Et que peut-on dire de $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x < 0$?

EXERCICE 3. — Montrer que : $\forall\, x \in [-1;1]\,,\quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Interprétation graphique. *Les courbes représentatives de arccos et de arcsin sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = \dfrac{\pi}{4}$ *(voir ci-contre).*



EXERCICE 4. — Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \arcsin(x) \geqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arcsin est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation* $y = x$*) sur* $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 5. — Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \arctan(x) \leqslant x$.

Interprétation graphique. *La courbe représentative de arctan est située au-dessus de sa tangente à l'origine (la droite d'équation* $y = x$*) sur* $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 6. — Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\sin(\arccos(x))$	3/ $\cos(2\arccos(x))$	5/ $\sin(2\arccos(x))$	7/ $\sin(2\arctan(x))$
2/ $\cos(\arcsin(x))$	4/ $\cos(2\arcsin(x))$	6/ $\cos(2\arctan(x))$	8/ $\tan(2\arcsin(x))$

EXERCICE 7. — Etablir que : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 8. — **FORMULE DE MACHIN.** [*]

1/ Calculer $A = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

2/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

3/ Montrer que : $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

[*]. John Machin fut un mathématicien anglais du 18ème siècle (1680-1751), notamment connu pour avoir démontré en 1706 la formule que l'on vous demande d'établir dans cet exercice, qui lui a permis d'obtenir une remarquable (pour l'époque) approximation du nombre π (100 décimales).

Extraits de DS

Exercice 9. — (Ca-deau !). On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan\left(x^3\right)$. Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 10. — (Tangente et Arctangente).

1/ Rappeler la formule de soustraction pour la tangente.

2/ Etablir que pour tout entier naturel n on a : $\arctan\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)$

3/ En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)$ en fonction de N ; puis la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Exercice 11. — (Cosinus et arccosinus).

1/ Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.

2/ Etablir que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{(n^2-1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

Exercice 12. — (Arcsinus).

1/ On pose $A\,(x) = \cos\left(\arcsin(x)\right)$. Pour quelles valeurs de x l'expression $A(x)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs. Simplifier $A(x)$ pour tout réel x de D.

2/ Etablir que :

$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$$

Exercice 13. — Une fonction bijective. On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ en posant pour tout réel x de I : $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1/ Démontrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

2/ Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

3/ Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$

4/ Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J\backslash\{1\}$ et établir que :

$$\forall x \in J\backslash\{1\}, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 14. — Equation. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E)} : \qquad 1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x) = 0$$

<u>Indication</u> : *mais quelles sont donc les racines du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$?*

Exercice 15. — **(Dérivées successives de arctan, problème 1 novembre 2023).**

1/ Question préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x-\mathrm{i})^7 - (x+\mathrm{i})^7 = 0$$

Partie 1 - Une relation de récurrence

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan'(x) = 1$$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x) + 2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x) + n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ *à partir de celles de* $\arctan^{(n+1)}$ *et de* $\arctan^{(n)}$. *Puisque l'on connaît* $\arctan^{(0)}$ *et* $\arctan^{(1)}$, *on peut donc en déduire* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(3)}$ *à partir de* $\arctan^{(1)}$ *et* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(4)}\ldots$

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ *par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.*

Partie 2 - Formules explicites des dérivées successives de arctan

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-a\}\,,\; g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x \neq -a$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}$$

On ***admettra*** *par la suite que cette formule reste valable pour un nombre* ***complexe*** *a.*

On ***admettra*** *également que pour tout réel x, on a :*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}} - \frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{i}}{2(1+x^2)^{n+1}}\, P_{n+1}(x) \qquad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}$$

6/ **"Le cas impair" : calcul de** $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{2n+1} - (x+\mathrm{i})^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k \left((-1)^k - 1\right) x^{2n+1-k}$$

b/ Déduire de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} \mathrm{i}^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

d/ **Application**. En utilisant la formule de la question précédente, vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7}\left(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1\right)$$

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\operatorname{cotan}\left(-\frac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in [\![1, 6]\!]$.

On rappelle que $\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ *(pour tout réel* $x \neq 0\ [\pi]$*).*

7/ **"Le cas pair" : calcul de** $\arctan^{(2n)}$. Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$.

Etablir que :

$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$