MPSI – Colle 7 (12 au 15 novembre 2024) : Fonctions trigonométriques réciproques

Chapitre 7 : Fonctions circulaires réciproques

1 – Fonctions à valeurs réelles bijectives

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exemple : la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

Propriété. La bijection réciproque d'une bijection impaire est impaire.

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \left(\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}\right)$$

2 – Fonctions circulaires réciproques

i/ La fonction cosinus réalise une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arccosinus** et est notée **arccos** (plutôt que $\cos^{-1}$, notation que vous avez sans doute déjà vue sur vos calculatrices).

Plus explicitement :

$$\begin{array}{llll} \arccos : & [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [0;\pi] \\ & & & \text{de l'équation } \cos(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (attention aux intervalles !) :

$$[\forall x \in [-1;1],\ \cos(\arccos(x)) = x] \wedge [\forall x \in [0;\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais attention : $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ii/ La fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2;\pi/2]$ dans $[-1;1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée **arcsin**. La fonction arcsinus est donnée par :

$$\begin{array}{llll} \arcsin : & [-1;1] & \longrightarrow & [-\pi/2;\pi/2] \\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [-\pi/2;\pi/2] \\ & & & \text{de l'équation } \sin(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-attention aux intervalles !) :

$$[\forall x \in [-1;1],\ \sin(\arcsin(x)) = x] \wedge [\forall x \in [-\pi/2;\pi/2],\ \arcsin(\sin(x)) = x]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais attention : $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$

iii/ La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée **arctangente** et est notée **arctan** (plutôt que $\tan^{-1}$).

La fonction arctangente est donnée par :

$$\begin{array}{llll} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \text{unique solution dans } \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & & & \text{de l'équation } \tan(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-re-attention aux intervalles !) :

$$[\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x] \wedge \left[\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x\right]$$

<u>Quelques valeurs</u> : $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$; $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$; $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\pi}{12}$; mais, attention (ce n'est plus du tout une surprise) : $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Dérivabilité de arccos, arcsin et arctan

- arccos est dérivable sur $]-1;1[$, et
$$\forall x \in \ ]-1;1[\ , \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et
$$\forall x \in \ ]-1;1[\ , \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Questions de cours

- **Pur cours** : tout sur l'une des fonctions arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL à l'ordre 1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.
- **Propriété**. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).
- **Propriété**. La bijection réciproque d'une bijection impaire est impaire.
- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$ **<u>ET</u> Application** : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.
- **Exercice classique**. Etablir que $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Objectifs de la semaine :

- Savoir établir qu'une **fonction réalise une bijection** entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ (continuité, stricte monotonie, TVI).
- Connaître les fonctions **arccos, arcsin et arctan** : ce sont de nouvelles fonctions usuelles.
- Avoir compris le principe des **"exercices classiques"** vus en clôture du chapitre 7.