Exercices 8 – Méthodes de calcul intégral – Corrigé

Conventions. Dans cette feuille, on conviendra de noter $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ une primitive de la fonction f.
Par ailleurs, dans la plupart des calculs de primitives, on omettra de noter le "+ constante", et on s'autorisera donc à écrire :

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) \quad \text{par exemple.}$$

Intégrales et primitives usuelles

Exercice 1. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^4$
2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$
3) $f : x \longmapsto \sqrt{x}$
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$
6) $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
7) $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$
8) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-4x^2}}$
9) $f : x \longmapsto \tan^2(x)$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int x^4\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = \int x^{-n}\mathrm{d}x = \frac{x^{1-n}}{1-n}$ si $n \neq 1$; et $\ln(|x|)$ si $n = 1$

3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}\mathrm{d}x = 2\,x^{1/2}$

5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2}$

6) $\displaystyle\int \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$

7) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(2x)$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\arcsin(x)}{2}$

9) $\displaystyle\int \tan^2(x)\mathrm{d}x = \int 1+\tan^2(x)-1\mathrm{d}x = \int 1+\tan^2(x)\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x = \tan(x) - x$

Exercice 2. — **Zoom sur les primitives de fonctions "de la forme $u'f'(u)$"**

Trois **cas particuliers** remarquables :

1) Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$;
2) Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u ;
3) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$
2) $f : x \longmapsto \cos(x)\ \sin^{2023}(x)$
3) $f : x \longmapsto (1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
4) $f : x \longmapsto (1-x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
5) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
6) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$
7) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^\alpha x}$
8) $f : x \longmapsto \tan(x)$
9) $f : x \longmapsto \tan^3(x)$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$

2) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^{2023}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2024}\sin^{2024}(x)$

3) $\displaystyle\int (1+x)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$

4) $\displaystyle\int (1-x)^n\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

6) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(x)$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^\alpha(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\ln^{1-\alpha}(x)$ si $\alpha \neq 1$; et $\ln\left(|\ln(x)|\right)$ si $\alpha = 1$

8) $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln\left(|\cos(x)|\right)$

9) $\displaystyle\int \tan^3(x)\mathrm{d}x = \int \tan(x)+\tan^3(x)-\tan(x)\mathrm{d}x = \int \tan(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x - \int \tan(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2(x)+\ln\left(|\cos(x)|\right)$

Exercice 3. — Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto \cos^2(x)$

2) $f : x \longmapsto \tan^2(x)$

3) $f : x \longmapsto \cos^3(x)$

4) $f : x \longmapsto \cos^4(x)$

5) $f : x \longmapsto \sin^4(x)$

6) $f : x \longmapsto \cos^2(x)\sin^2(x)$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1+\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}$

2) $\displaystyle\int \tan^2(x)\mathrm{d}x = \int 1+\tan^2(x)-1\mathrm{d}x = \tan(x)-x$

3) Par linéarisation : $\displaystyle\int \cos^3(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x)}{12}+\frac{3\sin(x)}{4}$

4) Par linéarisation : $\displaystyle\int \cos^4(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}\mathrm{d}x = \frac{\sin(4x)}{32}+\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$

5) Par linéarisation : $\displaystyle\int \sin^4(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(4x)-4\cos(2x)+3}{8}\mathrm{d}x = \frac{\sin(4x)}{32}-\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$

6) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x = \int \cos^2(x)\mathrm{d}x - \int \cos^4(x)\mathrm{d}x$ d'où la solution grâce aux questions 1 et 4.

Exercice 4. — **(Primitives de fractions rationnelles 1)**. Soit f définie sur $I = \left]-1, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq -1, \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2) Déduire de ce qui précède une primitive de f sur I.

Corrigé.

1) Par identification (par exemple), on obtient : $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq -1, \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

2) D'après ce qui précède :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left(|x+1|\right)$$

Exercice 5. — **(Primitives de fractions rationnelles 2)**. Soit f définie sur $I = \left]1, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$.
Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$. En déduire une primitive de f sur I.

Corrigé.

1) Par identification (par exemple), on obtient : $a = 1/3$ et $b = -1/3$. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \wedge x \neq -2, \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

2) D'après ce qui précède :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|^{1/3}\right)$$

Exercice 6. — **(Primitives de fractions rationnelles 3)**. Déterminer une primitive de f sur I, dans chacun des cas suivants (I étant un intervalle à préciser).

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 6}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

Corrigé.

1) Notons que : $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$. Donc il existe deux réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-6}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $a = -1/5$ et $b = 1/5$. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \wedge x \neq 6, \quad f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\left|\frac{x-6}{x-1}\right|^{1/5}\right)$$

2) Notons que : $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Donc il existe deux réels a et b tels que :

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $a=1/2$ et $b=-1/2$. Ainsi :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ x\neq 1\wedge x\neq -1,\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/2}\right)$$

3) Notons que : $x^2-a=(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$. Donc il existe deux réels b et c tels que :

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a}=\frac{b}{x-\sqrt{a}}+\frac{c}{x+\sqrt{a}}$$

Par identification (par exemple), on obtient : $b=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ et $c=-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Ainsi :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ x\neq \sqrt{a}\wedge x\neq -\sqrt{a},\quad f(x)=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{a}}-\frac{1}{x+\sqrt{a}}\right)$$

D'après ce qui précède :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\right)$$

Exercice 7. — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

2) $I_2=\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $I_3=\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

4) $I_4=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$

5) $I_5=\displaystyle\int_0^8 x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

6) $I_6=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

7) $I_7=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\,\mathrm{d}x$

8) $I_8=\displaystyle\int_0^{\pi/6}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Corrigé.

1) $I_1=\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

2) $I_2=\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=[\arcsin(x)]_0^{1/2}=\frac{\pi}{6}$

3) $I_3=\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4=\frac{14}{3}$

4) $I_4=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x=[\ln(|x-4|)]_0^1=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

5) $I_5=\displaystyle\int_0^8 x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{7}x^{7/3}\right]_0^1=\frac{384}{7}$

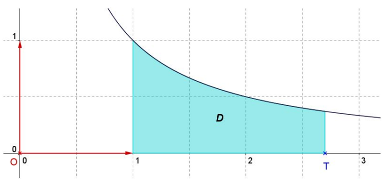
6) $I_6=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=[\tan(x)]_0^{\pi/4}=1$

7) $I_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2(x) - 1\,\mathrm{d}x = [\tan(x) - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

8) $I_8 = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\pi/6} = \frac{11}{24}$

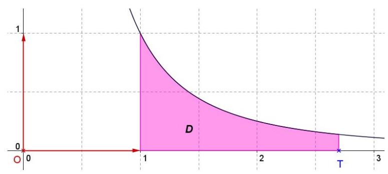
Exercice 8. — Fini ou pas ? Dans les trois questions ci-dessous, T désigne un réel supérieur ou égal à 1.

1) On note $A\,(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$



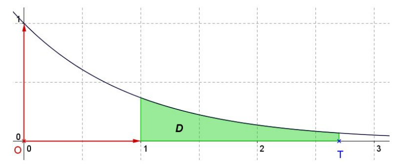
Calculer $A\,(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} A\,(T)$

2) On note $B\,(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$



Calculer $B\,(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} B\,(T)$

3) On note $C\,(T) = \displaystyle\int_1^T \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$



Calculer $C\,(T)$, puis $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} C\,(T)$

Corrigé. 1) $A\,(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(T)$. Donc : $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} A\,(T) = +\infty$.

2) $B\,(T) = \displaystyle\int_1^T \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{T}$. Donc : $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} B\,(T) = 1$.

3) $C\,(T) = \displaystyle\int_1^T \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-T}$. Donc : $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow +\infty} C\,(T) = \mathrm{e}^{-1}$.

Intégration par parties

Exercice 9. — Applications directes – Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto (1 - x)\,\mathrm{e}^{2x}$ | 2) $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ | 3) $f : x \longmapsto x\sin(x)$ | 4) $f : x \longmapsto x^2\cos(x)$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int (1 - x)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - x)\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - x)\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$

2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$

3) $\displaystyle\int x\sin(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x)$

4) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\mathrm{d}x$ puis on utilise la question précédente.

Exercice 10. — Primitive(s) de ln

1) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction ln (sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera).

2) Application : déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})$

Corrigé. 1) Cf cours : $\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$.

2) $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\ln(x) - x\right)$

Exercice 11. — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x)\mathrm{d}x$ | 2) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln^2(x)\mathrm{d}x$ | 3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^2+1\right)\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{d}x$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[(1-x)\sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x}_{=0} = 0$

2) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln^2(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[(x\ln(x)-x)\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}}}_{=0} - \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) - 1\mathrm{d}x = -\left[x\ln(x)-2x\right]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}-2$

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^2+1\right)\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{d}x = \left[(x^2+1)\mathrm{ch}(x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 x\mathrm{ch}(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{ch}(1) - 1 - 2\left[x\mathrm{sh}\,(x)\right]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{d}x$

$$= 2\mathrm{ch}(1) - 1 - 2\mathrm{sh}\,(1) + 2\mathrm{ch}(1) - 2 = 4\mathrm{ch}(1) - 2\mathrm{sh}\,(1) - 3$$

Changement de variable

Exercice 12. — A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ | 3) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$ | 5) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ | 4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ | 6) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$

Corrigé.

1) $\displaystyle F(x) = \int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x =_{(u=\mathrm{e}^x)} \int \frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u =_{(DES)} \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)$

2) $\displaystyle F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} =_{u=\sqrt{x}} \int \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan(u) = 2\arctan(\mathrm{e}^x)$

3) $\displaystyle F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln(x)}} =_{u=\ln(x)} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{1+u} = 2\sqrt{1+\ln(x)}$

4) CF cours
5) CF cours
6) CF cours

Exercice 13. — A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$ | 3) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ | 5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ | 4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ | 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$

Corrigé.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x =_{u=\mathrm{e}^x} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{u}{u+1}\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \mathrm{e} - 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t =_{u=\mathrm{e}^t} \int_1^2 \frac{1}{u(1+u)}$ du puis même DES que dans l'exo 12, question 1

3) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x =_{u=\ln(x)} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$

4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t =_{u=\sqrt{t}} \int_1^2 \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u = 2\left[\ln(u+1)\right]_1^2 = 2\ln(3/2)$

5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} =_{u=\tan(x/2)} \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{2}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{2u}\mathrm{d}u = \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)} =_{u=\tan(x/2)} \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u$

$$=_{(DES)} \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = \left[\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\right]_0^{\tan(\pi/8)} = \ln\left(\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}\right)$$

Exercice 14. — Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a}$. Déterminer une primitive de f sur I, où I est un intervalle à préciser.

Corrigé. CF exemple fait en cours (dans le paragraphe sur le changement de variable) pour le calcul d'une primitive de $\dfrac{1}{x^2+a^2}$.

Exercice 15. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Fait en classe.

Intégrales classiques en Physique

Exercice 16. — **(Valeur efficace)**. Soit f une fonction T-périodique (définie sur $\mathbb{R}$). On appelle **valeur efficace de** f le réel positif : $\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$ (où a désigne un réel quelconque). *

Calculer les valeurs efficaces des fonctions cos et sin.

Corrigé. Fait en classe.

Exercice 17. — **(Primitives "complexes" 1)**. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Corrigé. CF cours

Exercice 18. — **(Primitives "complexes" 2)**. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f dans chacun des cas suivants :

1/ $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$

2/ $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$

3/ $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx} \cos(\mu x)$ avec $(k,\mu) \in \mathbb{R}^2$

4/ $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx} \sin(\mu x)$ avec $(k,\mu) \in \mathbb{R}^2$

Corrigé.

1/ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^x\left(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\right)\right)$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)$$

2/ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(1+ni)x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+ni}\mathrm{e}^{(1+ni)x}\right)$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1-ni}{n^2+1}\mathrm{e}^x\left(\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)\right)\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{n^2+1}\left(\sin(nx)-n\cos(nx)\right)$$

*. La valeur efficace est (heureusement !) indépendante du choix du réel a.

4/ Si $(k,\mu)\neq(0,0)$, on a :

$$\int \mathrm{e}^{kx}\sin(\mu x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(k+\mu\mathrm{i})x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{k+\mu\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(k+\mu\mathrm{i})x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{k-\mu\mathrm{i}}{k^2+\mu^2}\mathrm{e}^{kx}\left(\cos(\mu x)+\mathrm{i}\sin(\mu x)\right)\right) = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^2+\mu^2}\left(k\sin(\mu x)-\mu\cos(\mu x)\right)$$

3/ Selon la question 4, si $(k,\mu)\neq(0,0)$, on a :

$$\int \mathrm{e}^{kx}\cos(\mu x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{k-\mu\mathrm{i}}{k^2+\mu^2}\mathrm{e}^{kx}\left(\cos(\mu x)+\mathrm{i}\sin(\mu x)\right)\right) = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k^2+\mu^2}\left(k\cos(\mu x)+\mu\sin(\mu x)\right)$$

Pour vous tester ! Exercice de synthèse sur les intégrales

Exercice 19. — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une IPP et/ou d'un changement de variable et/ou en reconnaissant une primitive usuelle :

1/ $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-x-1}{x-1}$

2/ $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x(x-1)}$

3/ $f : x \longmapsto \dfrac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$

4/ $f : x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5/ $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x\sin(\lambda x+\varphi)$ (λ, φ réels)

6/ $f : x \longmapsto \ln(x-1)$

7/ $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$

8/ $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

9/ $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

10/ $f : x \longmapsto x^2\arctan(x)$

11/ $f : x \longmapsto \arcsin^2(x)$

12/ $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos^2(x)}$

Corrigé.

1/ $$\int \frac{x^2-x-1}{x-1}\mathrm{d}x = \int x - \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-\ln(|x-1|)$$

2/ $$\int \frac{1}{2x(x-1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x =_{(DES)} \frac{1}{2}\int -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\right)$$

3/ $$\int \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x-2)\,x\,(x-4)}\mathrm{d}x =_{(DES)} \int \frac{-3/4}{x-2}+\frac{3/8}{x}+\frac{3/8}{x-4}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{4}\ln(|x-2|)+\frac{3}{8}\ln(|x|)+\frac{3}{8}\ln(|x-4|)$$

4/ Il est clair que : $x^4=(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)+25x^2-60x+36\ldots$[†]

On en déduit que :

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int x+6\mathrm{d}x + \int \frac{25x^2-60x+36}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

$$=_{(DES)} \frac{x^2}{2}+6x+\int \frac{1/2}{x-1}-\frac{16}{x-2}+\frac{81/2}{x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{2}\ln(|x-1|)-16\ln(|x-2|)+\frac{81}{2}\ln(|x-3|)$$

†. Non, ce n'est pas clair du tout ; mais on peut obtenir cette identité en effectuant une division euclidienne (de polynômes). C'est une méthode que nous expliquerons plus tard cette année, dans le chapitre consacré aux polynômes.

5/ $\displaystyle\int e^x \sin(\lambda x+\varphi)\,dx = \text{Im}\left(\int e^{x(1+i\lambda)}e^{i\varphi}dx\right) = \text{Im}\left(\frac{e^{i\varphi}}{1+i\lambda}e^{x(1+i\lambda)}\right)$

$$= \text{Im}\left(\frac{(1-i\lambda)(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}{1+\lambda^2}e^x(\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x))\right)$$

En développant un peu :

$$\int e^x \sin(\lambda x+\varphi)\,dx = \text{Im}\left(\frac{e^x}{1+\lambda^2}(\cos(\varphi)+\lambda\sin(\varphi)+i(\sin(\varphi)-\lambda\cos(\varphi)))(\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x))\right)$$

D'où finalement :

$$\int e^x \sin(\lambda x+\varphi)\,dx = \frac{e^x}{1+\lambda^2}\left[(\cos(\varphi)+\lambda\sin(\varphi))\sin(\lambda x)+(\sin(\varphi)-\lambda\cos(\varphi))\cos(\lambda x)\right]$$

6/ $\displaystyle\ln(x-1)\,dx =_{IPP} x\ln(x-1) - \int \frac{1}{x-1}dx = x\ln(x-1)-\ln(x-1)$

7/ $\displaystyle\frac{x}{\cos^2(x)}dx =_{IPP} x\tan(x) - \int \tan(x)dx = x\tan(x)+\ln(|\cos(x)|)$

8/ $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx =_{IPP} -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)+1}{x}$

9/ $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx =_{IPP} 2x\sqrt{x+1} - 2\int\sqrt{x+1}dx = 2x\sqrt{x+1}-\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}$

10/ $\displaystyle\int x^2\arctan(x)dx =_{IPP} \frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

Or : $\displaystyle\int\frac{x^3}{1+x^2}dx = \int\frac{x+x^3-x}{1+x^2}dx = \int x - \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}-\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

Par suite : $\displaystyle\int x^2\arctan(x)dx = \frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{x^2}{6}+\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

11/ $\displaystyle\int \arcsin^2(x)\,dx =_{IPP} \arcsin(x)\left(x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right) - \int\frac{x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Or : $\displaystyle\int\frac{x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}+1\,dx = x+\int\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =_{IPP} x+\frac{1}{2}x\arcsin^2(x)-\frac{1}{2}\int\arcsin^2(x)\,dx$

On en déduit que :

$$\int\arcsin^2(x)\,dx = \arcsin(x)\left(x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right)-x-\frac{1}{2}x\arcsin^2(x)+\frac{1}{2}\int\arcsin^2(x)\,dx$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\int\arcsin^2(x)\,dx = \arcsin(x)\left(x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right)-x-\frac{1}{2}x\arcsin^2(x)$$

Finalement : $\displaystyle\int\arcsin^2(x)\,dx = 2\arcsin(x)\left(x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right)-2x-x\arcsin^2(x)$

$$= 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}-2x+x\arcsin^2(x)$$

12/ $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =_{u=\cos(x)} \int \frac{-1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u =_{t=u/\sqrt{2}} -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalement : $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right)$

Extraits de problèmes sur les intégrales

Exercice 20. — **Mines Sup** Pour tout entier naturel n non-nul on pose : $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{t/2}\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer I_1. 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

3) Déduire de la question précédente que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\mathrm{e}} = I_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}$.

4) Déterminer un réel A tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{A}{2^n n!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}$.

Corrigé. Fait en classe.

Exercice 21. — **Mines Sup, encore une fois** On définit, pour tout entier naturel n, la fonction g_n par :

$$\forall\, x \in [0;1],\ g_n(x) = x^n\sqrt{1-x} \qquad \text{et on pose : } \quad I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

1/ Calculer I_0.

2/ Pour tout entier naturel n, étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

3/ Montrer que pour tout entier naturel non-nul n on a : $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}\,I_{n-1}$ *(on pourra intégrer par parties I_n).*

4/ En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

5/ Montrer par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \dfrac{2^{2n+3}(n+2)!n!}{(2n+4)!}$

Corrigé.

1/ On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\left[(1-x)^3/2\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

2/ Pour tout entier naturel n on a : $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{x^n(x-1)\sqrt{1-x}}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}x$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. Donc la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3/ Soit n un entier naturel non-nul. On a : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x dans $[0,1]$, posons : $u(x) = x^n$ et $v(x) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}$. On a alors : $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$$

D'où :

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 \left(x^{n-1}-x^n\right)\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \frac{2n}{3}\left(I_{n-1}-I_n\right)$$

Ainsi :

$$\left(1+\frac{2n}{3}\right)I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\quad I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$

4/ On déduit des questions 1 et 3 que :

$$I_1 = \frac{4}{15}\,; \qquad I_2 = \frac{16}{105}\,; \qquad I_3 = \frac{32}{315}$$

Exercice 22. — **(Intégrales à paramètres).** Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer $I_{p,0}$, puis calculer $I_{0,q}$.

2) Etablir que $\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant I_{q,p} \leqslant 1$.

3) Etablir que $\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ I_{q,p} = I_{p,q}$ (on pourra utiliser un changement de variable).

4) Etablir que : $\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ I_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1}I_{p,q+1}$.

5) Donner l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Corrigé. A venir…

Exercice 23. — Pour tout réel x raisonnable, on pose $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1) Etablir que :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

2) Calculer l'intégrale : $\quad I = \displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

3) Déterminer une primitive sur $]\,0,\pi\,[$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Corrigé. Cf cours.

Exercice 24. — On considère la fonction $\varphi : x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2/ Calculer la dérivée de φ.

3/ Dresser le tableau de variation de φ.

Corrigé.

1/ La fonction $1/\ln$ est définie, et continue, sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

L'ensemble de définition de φ est donc : $D_\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2/ La fonction $1/\ln$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, elle admet des primitives (th fondamental de l'Analyse) : notons F l'une d'entre elles.

Par définition de φ et de F, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\,, \quad \varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$

Il s'ensuit que φ est dérivable sur D_φ, et pour tout réel x de D_φ on a :

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

3/ Selon la question précédente, la fonction φ est strictement positive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Questions classiques sur les intégrales de Wallis

➤ **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

Exo-W 1. — **Premières valeurs.** Calculer I_0, I_1 et I_2.

Corrigé. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (usuel) ; $I_1 = 1$ (usuel) ; $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (linéarisation)

Exo-W 2. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$

Corrigé. changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$

Corrigé. positivité de l'intégrale

Exo-W 4. — Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Corrigé. calcul de $I_{n+1} - I_n$ + positivité de l'intégrale.

Exo-W 5. — Montrer que la suite (I_n) est convergente.

Corrigé. 2 exos précédents + "toute suite réelle décroissante et minorée converge"

Exo-W 6. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

Corrigé. IPP et $n+2 = (n+1)+1$

Exo-W 7. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

Corrigé. récurrence sur p

Exo-W 8. — Montrer que pour tout entier naturel p on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Corrigé. récurrence sur p

Exo-W 9. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$

Corrigé. la suite de terme général $(n+1)\, I_{n+1} I_n$ est constante

Exo-W 10. — Etablir que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Corrigé. conséquence des exos W3, W5 et W9

Exo-W 11. — Etablir que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

Corrigé. $0 < I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ d'où $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ + gendarmes

Exo-W 12. — Etablir que : $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{2\,(2p+1)}{\pi}\, I_{2p}^2 = 1$

Corrigé. $I_{2p}^2 = \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \times I_{2p} I_{2p+1}$