

# EXERCICES 8 – MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRAL

## INTÉGRALES ET PRIMITIVES USUELLES

**EXERCICE 1.** — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$	4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	7) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$	8) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}$
3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$	6) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$	9) $f : x \mapsto \tan^2(x)$

**EXERCICE 2.** — Zoom sur les primitives de fonctions “de la forme  $u'f(u)$ ”

- 1) Une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln|u|$ ;
- 2) Une primitive de  $u'e^u$  est  $e^u$ ;
- 3) Une primitive de  $u'u^\alpha$  est  $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .

Trois cas particuliers remarquables :

Applications : déterminer une primitive de  $f$  dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto xe^{x^2}$	4) $f : x \mapsto (1-x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	7) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$
2) $f : x \mapsto \cos(x) \sin^{2023}(x)$	5) $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$	8) $f : x \mapsto \tan(x)$
3) $f : x \mapsto (1+x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	6) $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$	9) $f : x \mapsto \tan^3(x)$

**EXERCICE 3.** — Déterminer une primitive de  $f$  dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \cos^2(x)$	3) $f : x \mapsto \cos^3(x)$	5) $f : x \mapsto \sin^4(x)$
2) $f : x \mapsto \tan^2(x)$	4) $f : x \mapsto \cos^4(x)$	6) $f : x \mapsto \cos^2(x) \sin^2(x)$

**EXERCICE 4.** — (Primitives de fractions rationnelles 1). Soit  $f$  définie sur  $I = ]-1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

- 1) Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .
- 2) Dédire de ce qui précède une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**EXERCICE 5.** — (Primitives de fractions rationnelles 2). Soit  $f$  définie sur  $I = ]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ .

Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \wedge x \neq -2, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$ . En déduire une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**EXERCICE 6.** — (Primitives de fractions rationnelles 3). Déterminer une primitive de  $f$  sur  $I$ , dans chacun des cas suivants ( $I$  étant un intervalle à préciser).

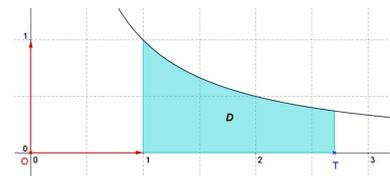
1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$	2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - a}$ ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ )
------------------------------------	-------------------------------	--

**EXERCICE 7.** — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^1 x^n dx$	3) $I_3 = \int_1^4 \sqrt{x} dx$	6) $I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	8) $I_8 = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x) dx$
2) $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	4) $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} dx$	7) $I_7 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx$	=
	5) $I_5 = \int_0^8 x^{\sqrt[3]{x}} dx$		

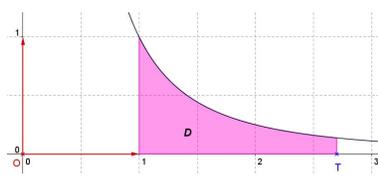
**EXERCICE 8. — Fini ou pas ?** Dans les trois questions ci-dessous,  $T$  désigne un réel supérieur ou égal à 1.

1) On note  $A(T) = \int_1^T \frac{1}{x} dx$



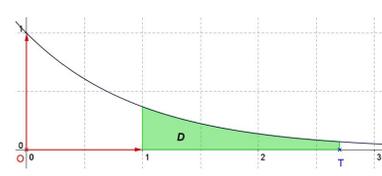
Calculer  $A(T)$ , puis  $\lim_{T \rightarrow +\infty} A(T)$

2) On note  $B(T) = \int_1^T \frac{1}{x^2} dx$



Calculer  $B(T)$ , puis  $\lim_{T \rightarrow +\infty} B(T)$

3) On note  $C(T) = \int_1^T e^{-x} dx$



Calculer  $C(T)$ , puis  $\lim_{T \rightarrow +\infty} C(T)$

### INTÉGRATION PAR PARTIES

**EXERCICE 9. — Applications directes** – Déterminer une primitive de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f : x \mapsto (1-x)e^{2x}$     |    2)  $f : x \mapsto xe^{-x}$     |    3)  $f : x \mapsto x \sin(x)$     |    4)  $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$

**EXERCICE 10. — Primitive(s) de  $\ln$**

- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction  $\ln$  (sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera).
- Application : déterminer une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$

**EXERCICE 11. —** A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1)  $\int_{-\pi}^{\pi} (1-x) \cos(x) dx$     |    2)  $\int_1^e \ln^2(x) dx$     |    3)  $\int_0^1 (x^2+1) \operatorname{sh}(x) dx$

### CHANGEMENT DE VARIABLE

**EXERCICE 12. —** A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$     |    3)  $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln(x)}}$     |    5)  $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$   
 2)  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$     |    4)  $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$     |    6)  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

**EXERCICE 13. —** A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$     |    3)  $\int_1^e \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx$     |    5)  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)}$   
 2)  $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt$     |    4)  $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$     |    6)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$

**EXERCICE 14. —** Soient  $a$  un réel strictement positif, et  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a}$ . Déterminer une primitive de  $f$  sur  $I$ , où  $I$  est un intervalle à préciser.

**EXERCICE 15. —** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ . Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### INTÉGRALES CLASSIQUES EN PHYSIQUE

**EXERCICE 16. — (Valeur efficace).** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique (définie sur  $\mathbb{R}$ ). On appelle **valeur efficace**

de  $f$  le réel positif :  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt}$  (où  $a$  désigne un réel quelconque).\*

Calculer les valeurs efficaces des fonctions  $\cos$  et  $\sin$ .

**EXERCICE 17. — (Primitives “complexes” 1).** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $x \mapsto e^{\alpha x}$ .

\*. La valeur efficace est (heureusement !) indépendante du choix du réel  $a$ .

**EXERCICE 18.** — (**Primitives “complexes” 2**). Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  dans chacun des cas suivants :

1/  $f : x \mapsto e^x \cos(x)$

3/  $f : x \mapsto e^{kx} \cos(\mu x)$  avec  $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2/  $f : x \mapsto e^x \sin(nx)$  avec  $n \in \mathbb{N}$

4/  $g : x \mapsto e^{kx} \sin(\mu x)$  avec  $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$

**POUR VOUS TESTER ! EXERCICE DE SYNTHÈSE SUR LES INTÉGRALES**

**EXERCICE 19.** — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une IPP et/ou d'un changement de variable et/ou en reconnaissant une primitive usuelle :

1)  $f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$

5)  $f : x \mapsto e^x \sin(\lambda x + \varphi)$  ( $\lambda, \varphi$  réels)

9)  $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$

2)  $f : x \mapsto \frac{1}{2x(x - 1)}$

6)  $f : x \mapsto \ln(x - 1)$

10)  $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$

3)  $f : x \mapsto \frac{3}{(x - 2)(x^2 - 4x)}$

7)  $f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}$

11)  $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$

4)  $f : x \mapsto \frac{x^4}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

8)  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$

12)  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos^2(x)}$

**EXTRAITS DE PROBLÈMES SUR LES INTÉGRALES**

**EXERCICE 20.** — **MINES SUP** Pour tout entier naturel  $n$  non-nul on pose :  $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{t/2} dt$ .

1) Calculer  $I_1$ .      2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n + 1)!}$ .

3) Dédire de la question précédente que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{e} = I_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$ .

4) Déterminer un réel  $A$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{A}{2^n n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}$ .

**EXERCICE 21.** — **MINES SUP, ENCORE UNE FOIS** On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $g_n$  par :

$\forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n \sqrt{1 - x}$       et on pose :  $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x} dx$

1/ Calculer  $I_0$ .

2/ Pour tout entier naturel  $n$ , étudier le signe de  $I_{n+1} - I_n$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .

3/ Montrer que pour tout entier naturel non-nul  $n$  on a :  $I_n = \frac{2n}{2n + 3} I_{n-1}$  (on pourra intégrer par parties  $I_n$ ).

4/ En déduire les valeurs de  $I_1, I_2$  et  $I_3$ .

5/ Montrer par récurrence sur  $n$  que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+3} (n + 2) n!}{(2n + 4)!}$

**EXERCICE 22.** — (**INTÉGRALES À PARAMÈTRES**). Pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels on pose :

$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1 - x)^q dx$

1) Calculer  $I_{p,0}$ , puis calculer  $I_{0,q}$ .

2) Etablir que  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq I_{q,p} \leq 1$ .

3) Etablir que  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{q,p} = I_{p,q}$  (on pourra utiliser un changement de variable).

4) Etablir que :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p+1,q} = \frac{p + 1}{q + 1} I_{p,q+1}$ .

5) Donner l'expression de  $I_{p,q}$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

**EXERCICE 23.** — Pour tout réel  $x$  raisonnable, on pose  $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ .

1) Etablir que :

$$\cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

2) Calculer l'intégrale :  $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$

3) Déterminer une primitive sur  $]0, \pi[$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ .

**EXERCICE 24.** — On considère la fonction  $\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ .

1) Déterminer l'ensemble de définition de  $\varphi$ .

2) Calculer la dérivée de  $\varphi$ .

3) Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ .

### QUESTIONS CLASSIQUES SUR LES INTÉGRALES DE WALLIS

► **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

**Exo-W 1.** — **Premières valeurs.** Calculer  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .

**Exo-W 2.** — Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

**Exo-W 3.** — Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$

**Exo-W 4.** — Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

**Exo-W 5.** — Montrer que la suite  $(I_n)$  est convergente.

**Exo-W 6.** — Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

**Exo-W 7.** — Montrer que pour tout entier naturel  $p$  on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

**Exo-W 8.** — Montrer que pour tout entier naturel  $p$  on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

**Exo-W 9.** — Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$

**Exo-W 10.** — Etablir que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

**Exo-W 11.** — Etablir que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

**Exo-W 12.** — Etablir que :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2(2p+1)}{\pi} I_{2p}^2 = 1$

