Corrigé du DM de Toussaint

Exercice 1 — (Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$) On considère l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1/ Etablir que l'application f est bijective.

Introduisons l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie en posant pour tout entier naturel n :

$$g(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair ; et } g(n) = -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair}$$

➤ Calculons $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Considérons un entier relatif n et distinguons deux cas : $n \geqslant 0$ et $n < 0$.

➢ Si $n \geqslant 0$, alors :

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$$

➢ Si $n < 0$, alors :

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(-2n-1) = -\frac{-2n-1+1}{2} = n$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}, \ (g \circ f)(n) = n$

➤ Calculons $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Considérons un entier naturel n et distinguons deux cas : n pair et n impair.

➢ Si n est pair, alors :

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2 \times \frac{n}{2} = n$$

➢ Si n est impair, alors :

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(-\frac{n+1}{2}\right) = -2 \times \left(-\frac{n+1}{2}\right) - 1 = n$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (f \circ g)(n) = n$

Conclusion. Il résulte de ce qui précède que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$; donc l'application f est bijective.

2/ En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

D'après la question 1, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents. **Conclusion.** $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3/ Intermède - Valuation 2-adique.[1] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle valuation 2-adique de n et on note $v_2(n)$ la plus grande puissance de 2 qui divise n.

Par exemple : $v_2(24) = 3$ car $2^3 = 8$ divise 24 ; mais $2^4 = 16$ ne le divise pas.

Montrer que tout entier entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit $n = 2^{v_2(n)} \times q$, avec q un entier naturel impair.

Soit n un entier naturel non-nul. L'ensemble des puissances de 2 qui divisent n est non-vide (car 2^0 divise n), et est majoré (pour un entier N suffisamment grand, on a $2^N > n$; et 2^N ne peut pas diviser n). Cet ensemble possède donc un plus grand élément, noté $v_2(n)$ dans l'énoncé.

Par définition : $2^{v_2(n)}$ divise n, et $2^{v_2(n)+1}$ ne divise pas n.

En d'autres termes, il existe q un entier naturel tel que : $n = 2^{v_2(n)} \times q$ (puisque $2^{v_2(n)}$ divise n).

En outre, q est impair, puisque $2^{v_2(n)+1}$ ne divise pas n.

Conclusion. Tout entier entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit $n = 2^{v_2(n)} \times q$, avec q un entier naturel impair.

4/ Etablir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Introduisons l'application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie en posant pour tout $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\varphi(a, b) = 2^a \times (2b + 1)$$

Montrons que φ est une bijection, en prouvant son injectivité et sa surjectivité (pour changer !).

➤ **Injectivité de φ.**

Soient (a, b) et (c, d) deux couples d'entiers naturels, tels que : $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$.

Alors : $2^a \times (2b + 1) = 2^c \times (2d + 1)$.

Supposons que $a \neq c$. Sans nuire à la généralité, on peut alors supposer que : $a > c$.
On a alors : $2^{a-c}(2b + 1) = 2d + 1$.
En particulier, 2^{a-c} divise $2d + 1$; et puisque $a - c > 0$, on en déduit que $2d + 1$ est pair : absurde !

Il s'ensuit que $a = c$. On en déduit que $2b + 1 = 2d + 1$, d'où $b = d$.

Finalement : $(a, b) = (c, d)$. On a donc établi l'implication : $[\varphi(a, b) = \varphi(c, d)] \Longrightarrow [(a, b) = (c, d)]$.

L'application φ est injective.

➤ **Surjectivité de φ.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il existe un entier naturel impair q tel que : $n = 2^{v_2(n)} \times q$.

Or q étant impair, il existe un entier naturel q' tel que : $q = 2q' + 1$.

Ainsi : $n = 2^{v_2(n)} \times (2q' + 1)$. Càd : $n = \varphi(v_2(n), q')$.

Il s'ensuit que tout entier naturel non nul admet un antécédent par φ : l'application φ est surjective.

1. Cette notion a déjà été introduite dans le TP4 d'informatique.

➤ D'après ce qui précède, φ est une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

En d'autres termes, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents.

Puisque par ailleurs, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents (selon le cours), les ensembles $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents (par transitivité de la relation d'équipotence).

Conclusion. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 2 — (Applications - Similitudes directes) Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, avec $a\neq 0$, on définit une application $f_{a,b}\in\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az+b \end{aligned}$$

Une telle application $f_{a,b}$ est une **similitude directe** ; on note $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des similitudes directes :

$$\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C}) = \{f_{a,b},\ (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\}$$

1/ Deux cas particuliers.

a/ Le cas $a=1$. Soit b un nombre complexe. Montrer que l'application $f_{1,b}$ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Soient z et Z deux complexes. On a :

$$f_{1,b}(z)=Z \Longleftrightarrow z+b=Z \Longleftrightarrow z=Z-b$$

On en déduit que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par $f_{1,b}$, qui est $Z-b$.
Conclusion. L'application $f_{1,b}$ est une bijection, et sa bijection réciproque est $f_{1,-b}$.

b/ L'application $f_{1+\mathrm{i},2}$. Dans cet exemple, on pose $a=1+\mathrm{i}$ et $b=2$, et on considère l'application $g=f_{1+\mathrm{i},2}$ qui est définie sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad g(z)=(1+\mathrm{i})z+2$$

Montrer que l'application g est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.

Soient z et Z deux complexes. On a :

$$g(z)=Z \Longleftrightarrow (1+\mathrm{i})z+2=Z \Longleftrightarrow (1+\mathrm{i})z=Z-2 \Longleftrightarrow z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}Z-\frac{2}{1+\mathrm{i}}$$

On en déduit que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par g, qui est $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}Z-\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$.
Conclusion. L'application g est une bijection, et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{1+\mathrm{i}},-\frac{2}{1+\mathrm{i}}}$.

2/ Généralisation — Le groupe des similitudes directes.

a/ Justifier brièvement que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\in\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

Très très brièvement : $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}=f_{1,0}$. Ainsi : $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\in\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

b/ Soient (a, b) et $(a', b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout complexe z, calculer $\left(f_{a',b'} \circ f_{a,b}\right)(z)$. En déduire que l'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe.

Soit z un complexe. On a :

$$\left(f_{a',b'} \circ f_{a,b}\right)(z) = f_{a',b'}\left(f_{a,b}(z)\right) = f_{a',b'}(az + b) = a'az + a'b + b'$$

On en déduit que : $f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a'a,a'b+b'}$
Conclusion. L'application $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$ est une similitude directe, explicitement : $f_{a'a,a'b+b'}$

c/ Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. A l'aide des deux questions précédentes, établir que $f_{a,b}$ est une bijection, et que sa bijection réciproque est une similitude directe.

Selon les deux questions précédentes, on a :

$$f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} = f_{1,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \text{ et } f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} = f_{1,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

Conclusion. $f_{a,b}$ est une bijection, et sa bijection réciproque est une similitude directe : $f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$

Exercice 3 — (Série alternée et Python).

Remarque préliminaire : à un moment dans cet exercice, il pourra vous être utile de savoir que la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *admet comme primitive la fonction arctan (arctangente), que* $\arctan(0) = 0$, *et que* $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. *Pour information, la fonction arctangente, et ses propriétés, seront étudiées lors de la semaine de rentrée.*

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left(S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

1/ Calcul de la limite de (S_n).

a/ Etablir que pour tout réel x et pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Soient x un réel et n un entier naturel. On a : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k$.

S étant un somme géométrique de raison $-x^2$ (différente de 1), on a :

$$S = \frac{1 - \left(-x^2\right)^{n+1}}{1 - \left(-x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Conclusion. $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

b/ En déduire que pour tout n entier naturel on a :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$$

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\, dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$

c/ Etablir que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx = 0$. En déduire la limite de (S_n).

Pour tout entier naturel n, et pour tout réel x dans $[0,1]$ on a :

$$0 \leqslant \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{2n+2}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\, dx$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

La conclusion s'ensuit, via le théorème des gendarmes.

Conclusion 1. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx = 0$

On en déduit, avec la question précédente, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{4}$

Conclusion 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$

Conclusion 2, avec le langage et les notations des séries, 2nd semestre.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ est convergente, et a pour somme $\dfrac{\pi}{4}$.

2/ Python : calculs des sommes S_n.

a/ Ecrire une fonction $F(N)$ qui reçoit comme paramètre un entier N, et qui retourne la valeur de S_N.

```
def F(N):
        Somme =0
        for k in range(N+1):
                Somme =Somme +((-1)**k)/(2*k+1)
        return Somme
```

b/ Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de saisir un entier N, et qui affiche la liste

$$L = [S_0, S_1, \ldots, S_N].$$

```
print('Bonjour! Choisis un entier!')
N =int(input())

Liste =[ ]
for k in range(N+1):
        Somme =Somme +[F(k)]
print(Liste)
```

ou, en plus expéditif :

```
print('Bonjour! Choisis un entier!')
N =int(input())

print([F(k) for k in range(N+1)])
```

Exercice 4 — (Représentations binaires de listes)
Pour un entier naturel non nul n, on note $\mathbb{N}_n$ l'intervalle d'entiers $[\![0, n]\!]$.

On peut représenter les sous-ensembles de $\mathbb{N}_n$ par des listes de 0 et de 1.

Explicitement, si E est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$, sa **représentation** est une liste L_E de longueur $n+1$: l'élément situé à la position k de L_E vaut 1 si k $\in$ E et 0 sinon.

Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 3, 6\}$ de $\mathbb{N}_6$ est représenté par la liste [0,1,0,1,0,0,1].

QUESTION 1 : quelle est la représentation du sous-ensemble $\{2, 3, 4\}$ de $\mathbb{N}_5$?

$$[0, 0, 1, 1, 1, 0]$$

QUESTION 2 : quelle est la représentation du sous-ensemble $\{1, 6\}$ de $\mathbb{N}_6$?

$$[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1]$$

➤ On suppose donnés deux sous-ensembles E1 et E2 de $\mathbb{N}_{2024}$. On note respectivement L1 et L2 les représentations binaires de E1 et E2. Le code ci-dessous doit permettre de construire la liste LUN, qui est la représentation binaire de $E_1 \cup E_2$; on suppose dans ce code que les listes L1 et L2 ont déjà été construites (et sont définies "dans la machine").

Compléter le code pour qu'il réponde à la question.

```
LUN =[ ]
for k in range(len(L1))
        LUN =LUN +[L1[k] +L2[k] - (L1[k]*L2[k]) ]
```