Problème de la semaine 5

Valeur exacte de $\zeta(2)$

On a établi en début d'année que la somme des inverses des entiers naturels

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, tandis que la somme des inverses des carrés des entiers naturels

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admet elle une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, sans pouvoir néanmoins la préciser à l'époque.

L'objectif principal de ce problème est de combler cette lacune, en utilisant une méthode essentiellement basée sur des calculs d'intégrales. [1]

Partie 1 - Sur les intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

1/ Calculer I_0 et I_1.

2/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\, I_n$$

3/ En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

Partie 2 - Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

4/ Calculer J_0.

5/ Etablir que la suite (J_n) est positive et décroissante.

1. Cette méthode est due à un mathématicien japonais, Yasushi Matsuoka, et a été publiée en 1961 dans une revue appelée "American Mathematical Monthly". Par ailleurs, il existe de très nombreuses autres démonstrations pour déterminer la valeur exacte de $\zeta(2)$: quatorze d'entre elles sont exposées notamment dans un article de Brendan Sullivan, *Numerous proofs of* $\zeta(2) = \pi^2/6$, Publications of Carnegie Mellon University, 2013. Ce qui laisse donc de la matière pour au moins treize autres problèmes. . .

6/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

7/ Pour tout entier naturel n, on pose : $\qquad K_n = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n.$

Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$$

8/ En déduire que pour tout entier naturel non nul N on a :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$$

Partie 3 - Vers la conclusion

Pour parvenir à nos fins, il "ne reste plus qu'à" prouver que K_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

9/ Pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose : $f(x) = 1 - \dfrac{\pi}{2}\cos(x)$. Etablir que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers J, où J est un intervalle que l'on précisera.

10/ Déduire de la question précédente que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de α). En déduire le signe de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11/ Démontrer que pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

12/ Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}$$

13/ Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}$$

14/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\zeta(2) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right]$.