Colle 8 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Propriété**. Positivité de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leqslant b$, et $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est continue et positive sur le segment $[a,b]$: à ce titre, elle admet une primitive F (th fondamental de l'intégration) sur $[a,b]$, et F est croissante sur $[a,b]$ (car F est dérivable et $F' = f \geqslant 0$). On en déduit que $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$, d'où la conclusion.

Application. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\left(\mathrm{ch}(t) - 1\right)\mathrm{d}t$. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

Soient n un entier naturel, et t un réel de $[0,1]$. D'une part, on a évidemment : $t^n \geqslant 0$. D'autre part, $\mathrm{ch}(t) - 1 \geqslant 0$, puisque la fonction ch est minorée par 1 (c'est même le minimum de la fonction ch sur $\mathbb{R}$).

On en déduit que la fonction $t \longmapsto t^n(\mathrm{ch}(t) - 1)$ est positive sur $[0,1]$ d'où, par positivité de l'intégrale : $I_n \geqslant 0$.

Question de cours n^{0}2 — **Propriété**. Croissance de l'intégrale : soient a et b deux réels, avec $a \leqslant b$, et $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction $f - g$ est continue et positive sur le segment $[a,b]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc : $\displaystyle\int_a^b (f-g) \geqslant 0$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que : $\displaystyle\int_a^b f - \int_a^b g \geqslant 0$, d'où la conclusion.

Application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrons que la suite (I_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{linéarité}} \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t} - (1-t)^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (1-t)^n\,(1-t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{-t\,(1-t)^n\,\mathrm{e}^{-t}}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{\text{positivité}} 0$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

Question de cours n^{0}3 — **Propriété**. Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}_1$ sur un intervalle I, et soient a et b deux réels dans I. Alors uv est dérivable sur I et :

$\forall x \in I,\ (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Par intégration entre a et b (légitime car u, v, u' et v' sont continues), on en déduit que : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ d'où

$$\boxed{\forall (u,v) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}),\ \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x}$$

Application. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ \\ v(t) = 1-t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ \\ v'(t) = -1 \end{array}\right.$$

Selon les TG, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, et on peut utiliser une IPP pour obtenir :

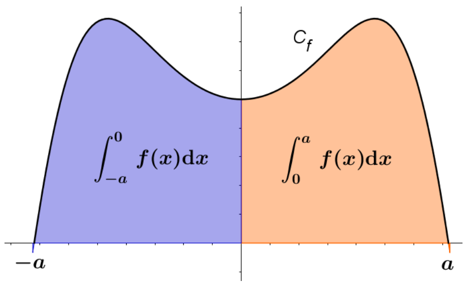
$$I = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}(1-t)\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = 2 - \mathrm{e}$$

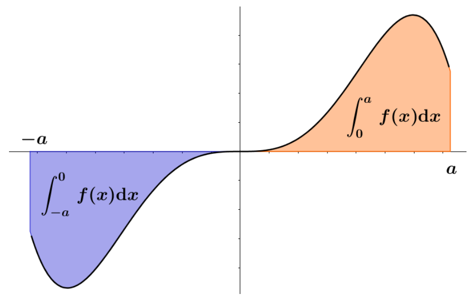
Remarque : cette méthode peut en particulier être appliquée au calcul de primitives :

$$\boxed{\forall (u,v) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}),\ \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\ (+cste)}$$

QUESTION DE COURS 4 — **Intégrale et parité**. Soit $f \in \mathscr{C}^0([-a,a],\mathbb{R})$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

Si f est paire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ Si f est impaire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$





D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\spadesuit)}$

Le changement de variable $u=-x$ donne : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-u)\,(-\mathrm{d}u)$ Soit : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u \quad (\clubsuit)}$

➤ Si f est paire : $\displaystyle\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit, avec ($\clubsuit$) et ($\spadesuit$) que :

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. Par conséquent : $\boxed{[f \text{ paire}] \Longrightarrow \left[\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]}$

➤ Si f est impaire : $\displaystyle\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a -f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. On en déduit, avec ($\clubsuit$) et ($\spadesuit$) que :

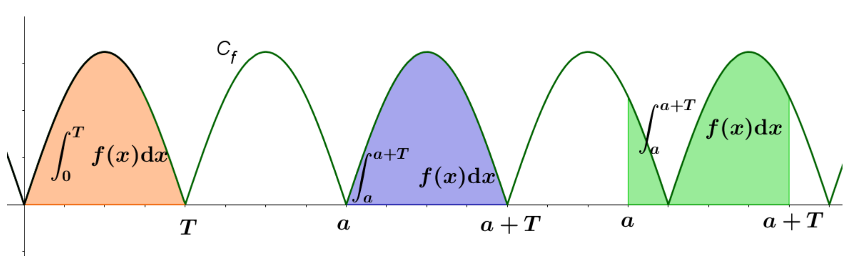
$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$. Par conséquent : $\boxed{[f \text{ impaire}] \Longrightarrow \left[\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right]}$

QUESTION DE COURS 5 — **Intégrale et périodicité**. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$). On a :

$$\forall a \in \mathbb{R},\quad \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale d'une fonction T périodique sur un segment de longueur T est indépendante de l'origine de ce segment.

Preuve. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$), et soit a un réel : $\exists!\, k \in \mathbb{Z},\ kT \leqslant a < (k+1)T$.



D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

Dans la première (*resp.* seconde) intégrale intervenant au second membre de cette égalité, on procède au changement de variable $u = x - kT$ (*resp.* $u = x-(k+1)T$). On obtient alors :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-kT}^{T} \underbrace{f(u+kT)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-kT} \underbrace{f(u+(k+1)T)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u$$

D'où : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-kT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-kT} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$, cqfd

Banque d'exercices

Exercice 1. — Déterminer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. — Déterminer une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. — Déterminer une primitive de arcsin sur $]-1,1[$.

Exercice 4. — Déterminer une primitive de arccos sur $]-1,1[$.

Exercice 5. — Pour tout réel α, calculer : $I_\alpha = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\, dx$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Exercice 7. — Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 8. — Soit x un réel > -1.

1/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{1}{1+x} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

2/ En déduire que : $\ln 2 = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right] + (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$

Exercice 9. — Soit a un réel strictement positif. Déterminer une primitive de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

Exercice 10. — Pour tout réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ Développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ ?

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Déterminer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = \int 1 \times \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$$

$\boxed{\text{La fonction } x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\ln(x) - x \text{ est une primitive de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Exercice 2. — Déterminer une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = \int 1 \times \arctan(x)\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$\boxed{\text{La fonction } x \in \mathbb{R} \longmapsto x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) \text{ est une primitive de la fonction arctan sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 3. — Déterminer une primitive de arcsin sur $]-1,1[$.

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = \int 1 \times \arcsin(x)\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{\text{La fonction } x \in \,]-1,1[\, \longmapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \text{ est une primitive de la fonction arcsin sur }]-1,1[.}$

Exercice 4. — Déterminer une primitive de arccos sur $]-1,1[$.

$$\int \arccos(x)\mathrm{d}x = \int 1 \times \arccos(x)\mathrm{d}x = x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{\text{La fonction } x \in \,]-1,1[\, \longmapsto x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} \text{ est une primitive de la fonction arccos sur }]-1,1[.}$

Exercice 5. — Pour tout réel α, calculer : $I_\alpha = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x$.

On a : $I_\alpha = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x} \times \ln^{-\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} u'(x) \times (u(x))^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ en ayant posé $u(x) = \ln(x)$

➤ **Premier cas : $\alpha \neq 1$.** On a :

$$I_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\left[\ln^{1-\alpha}(x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

➤ **Second cas : $\alpha = 1$.** On a :

$$I_\alpha = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|\ln(x)|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln(2)$$

Exercice 6. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,dx$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Selon l'énoncé, on a : $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,dx$

Pour tout réel $x \in [0,1]$, posons : $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = (1-x)^{n+1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = -(n+1)(1-x)^n \end{cases}$

Par IPP on obtient : $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[(1-x)^{n+1}\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{e}^x\,dx$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,dx = -1 + (n+1)\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{e}^x\,dx$

D'où : $I_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \, \mathrm{e}^x \, dx \Longleftrightarrow I_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)!} + I_n$.

Il s'ensuit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}}$

Exercice 7. — Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$.

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Pour tout réel $x \in [0,1]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. D'où la conclusion, par théorème d'encadrement.

Exercice 8. — Soit x un réel > -1.

1/ Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{1}{1+x} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

Soit n un entier naturel, et x un réel différent de (-1). On a : $\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] = \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ (somme géométrique de raison $-x \neq 1$).

Il s'ensuit que : $\dfrac{1}{1+x} = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

2/ En déduire que : $\ln 2 = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$

En intégrant terme à terme la relation de la question précédente on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow [\ln(1+x)]_0^1 = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right]\mathrm{d}x + \int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)}$$

$$\Longleftrightarrow \ln 2 = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k \mathrm{d}x\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale, bis)}$$

$$\Longleftrightarrow \ln 2 = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln 2 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x}$$

Remarque. Les résultats des exos 7 et 8 permettent d'affirmer que :

$$\ln(2) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ ce que l'on notera à l'avenir : } \ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Exercice 9. — Soit a un réel strictement positif. Déterminer une primitive de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

$$F = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $u = \dfrac{x}{a}$. Alors $x = a\,u$ d'où $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$F = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\arctan(u) \quad \text{D'où finalement : } \boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Exercice 10. — Pour tout réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction φ est par construction l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\cos(t)}$ qui s'annule en 0. Il s'ensuit que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} > 0$, d'où la conclusion.

2/ Développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ ?

La fonction φ étant dérivable en 0, elle admet un DL1 en 0, explicitement : $\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Or : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \mathrm{e}^{\cos(0)} = \mathrm{e}$. Par suite : $\varphi(h) = \mathrm{e}h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$