

## Chapitre 8 : Méthodes de calcul intégral

### 1 – Primitives (généralités)

**Définition.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles. Une primitive de  $f$  sur  $I$  est une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

**Propriété.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles. Deux primitives de  $f$  sur  $I$  diffèrent d'une constante. Explicitement, si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur  $I$ , alors :  $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F(x) - G(x) = K$ .

**Propriété.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles. Si  $F$  et  $G$  désignent des primitives respectives de  $f$  et  $g$  sur  $I$ , alors pour tout couple de réels  $(\lambda, \mu)$ , la fonction  $\lambda F + \mu G$  est une primitive de  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$ .

**Théorème.** Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive sur  $I$  (donc une infinité de primitives sur  $I$ ).

Explicitement, la fonction  $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$  (avec  $a \in I$ ).

### 2 – Primitives usuelles Voir formulaire.

#### Cas particuliers – Primitives et composées

- a) Une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln|u|$ ;
- b) Une primitive de  $u'e^u$  est  $e^u$ ;
- c) Une primitive de  $u'u^\alpha$  est  $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  (avec  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$ ).

### 3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

**Définition.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est le réel :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ , où  $F$  désigne une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Propriétés des intégrales.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$ .

- 1)  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$  (**linéarité**)
- 2)  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \mu \int_c^b f(t) dt$  (**relation de Chasles**)

$$3) [f \text{ positive sur } [a, b]] \implies \left[ \int_a^b f(t) dt \geq 0 \right] \text{ (positivité)}$$

$$4) [f \leq g \text{ sur } [a, b]] \implies \left[ \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \right] \text{ (croissance)}$$

**Exemple d'application :**  $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

### 4 – Intégration par parties

**Théorème - Intégration par parties.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$ . Alors :  $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ .

Pour le calcul des primitives : une primitive de  $u'v$  est  $uv - \int u'v$ .

**Exemples d'applications directes :** calcul des primitives de  $\ln$ , arctan, arccos et arcsin.

### 5 – Changement de variable

**Propriété. (changement de variable) :** soit  $f$  une fonction continue et  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , toutes deux définies sur des intervalles adéquats. Alors :  $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx$

La preuve de cette formule repose sur l'intégration terme à terme de la formule donnant la dérivée d'une composée.

Applications :

➤ une primitive de  $\frac{1}{\text{ch}}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 2 \arctan(e^x)$  (poser  $u = e^x$ );

➤ une primitive de  $\frac{1}{\text{sh}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$  (poser  $u = e^x$ );

➤ soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$  est

$$x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{poser } u = \frac{x}{a})$$

➤ intégrale et parité

➤ intégrale et périodicité

---

**QUESTIONS DE COURS**

► **Propriété.** Positivité de l'intégrale ET appli :  $\int_0^1 t^n (\operatorname{ch}(t) - 1) dt \geq 0$

► **Propriété.** Croissance de l'intégrale ET appli :  $(I_n) \searrow$  avec  $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^{-t} dt$

- **Propriété.** Formule d'intégration par parties ET appli : calcul de  $\int_0^1 (1-t)e^{-t} dt$
- **Propriété.** Intégrale et parité.
- **Propriété.** Intégrale et périodicité.

---

**APRÈS LA QC : UN EXO EXTRAIT DE LA BANQUE D'EXERCICES**
**OBJECTIFS DE LA SEMAINE :**

► Maîtriser le **formulaire des primitives usuelles.**

► Savoir reconnaître les trois formes :  $u'e^u$ ,  $u'/u$  et  $u'u^\alpha$  (pour trouver, par exemple, des primitives respectives de  $x \mapsto xe^{x^2}$ ,  $x \mapsto \tan(x)$  et

$$x \mapsto \ln^\alpha(x)/x).$$

► Appliquer la formule d'IPP (exemples : primitive de  $x \mapsto xe^x$ , Wallis...).

► Appliquer la formule du changement de variable (exemples : primitive de  $x \mapsto 1/\operatorname{ch}(x)$ ,  $x \mapsto 1/(x^2 + a^2)$ ...)

---

**Prévisions pour la colle 9 :** suite des méthodes de calcul intégral, avec les intégrales de fonctions à valeurs complexes, et un clin d'œil appuyé aux intégrales de Wallis. Le chapitre suivant sera consacré aux équations différentielles linéaires.