Colle 9 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Intégrales de Wallis (relation de récurrence)**.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+2} = \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t$

C'est-à-dire : $I_{n+2} = (n+1)\, I_n - (n+1)\, I_{n+2}$ d'où : $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n}$

Question de cours 2 — **Intégrales de Wallis, cas impair**. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ (en admettant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$).

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier naturel p.

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et d'autre part $\frac{2^0\,(0!)^2}{1!} = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p.

On a : $I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3}\,\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^2(p+1)^2}{2(p+1)(2p+3)}\,\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)}\,[(p+1)!]^2}{(2p+3)!}$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$

Question de cours n^{0}3 — **Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène)**. Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I.
Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ $(k \in \mathbb{K})$, où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Preuve. Notons (E) l'EDL : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
La fonction b/a est continue sur I (H+TG). A ce titre, b/a admet des primitives sur I ; notons A l'une d'entre elles.
Soit φ une solution de (E). Définissons une fonction g en posant : $\forall x \in I,\ g(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
La fonction g est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur I, et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\,\varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$
$$\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\,\varphi(x)\right)$$

La fonction a ne s'annulant pas sur I, cette dernière assertion est encore équivalente à la suivante :

$$\forall x \in I,\ a(x)g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,\underbrace{\left(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)\right)}_{=0}$$

la nullité de la parenthèse du terme de droite provenant de ce que φ est solution de (E).
Par suite : $\forall x \in I,\ a(x)g'(x) = 0$ d'où $\forall x \in I,\ g'(x) = 0$ (puisque a ne...).

Il s'ensuit que g est constante sur I, explicitement :

$$\exists\, k \in \mathbb{K},\ g(x) = k \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)} = k \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$$

On vient donc d'établir que toute solution de (E) est "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$".

La réciproque (toute fonction "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$" est solution de (E)) est une vérification aisée qui permet de conclure :

> Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ ($k \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$.

> Question de cours n^{0}4 — "La méthode de variation de la constante marche à tous les coups".
>
> Plus précisément, avec les notations et hypothèses de la question de cours 3, il existe une fonction $K \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que la fonction f_p définie par
>
> $$\forall\, x \in I, \qquad f_P(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} \quad (\text{où } A \text{ est une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I)$$
>
> est solution de l'équation différentielle (E).

Preuve. Soit $K \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. Posons : $\forall\, x \in I,\ f_P(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (H+TG). A ce titre, elle est dérivable sur I et :

$$\forall\, x \in I,\ f'_P(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - A'(x)K(x)\right) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
& f_P \text{ est solution de } (E) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)f'_P(x) + b(x)f_P(x) = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\right) + b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}K'(x) \underbrace{-b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}_{=0} = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}K'(x) = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\mathrm{e}^{A(x)} \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème et les théorèmes généraux sur la continuité assure que la fonction $x \longmapsto \dfrac{c(x)}{a(x)}\mathrm{e}^{A(x)}$ est continue sur I ; elle admet donc une primitive sur I. En d'autres termes, il existe une fonction K de classe $\mathscr{C}^1$ sur I satisfaisant l'identité ($\spadesuit$). On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \longmapsto K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est solution de (E).

> Question de cours n^{0}5 — **Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1).** Soient a, b et c trois fonctions de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, tque a ne s'annule pas sur I.
>
> On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
>
> Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :
>
> $$\begin{cases} \forall\, x \in I, \quad a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Preuve. Prouvons le théorème. Avec les notations de l'énoncé, la QC4 **qui sera admise dans cette question de cours**, assure qu'il existe une solution f_P de (E).

Soit φ une solution arbitraire de (E). Il existe un scalaire K tel que : $\forall\, x \in I,\ \varphi(x) = f_P(x) + K\mathrm{e}^{-A(x)}$.

Considérons à présent un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ arbitraire. On a :

$$\varphi(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow f_P(x_0) + K\mathrm{e}^{-A(x_0)} = y_0 \Longleftrightarrow K = (y_0 - f_P(x_0))\,\mathrm{e}^{A(x_0)}$$

On en déduit que la fonction φ définie en posant :

$$\forall\, x \in I,\ \varphi(x) = f_P(x) + (y_0 - f_P(x_0))\,\mathrm{e}^{A(x_0) - A(x)}$$

est l'unique solution de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Banque d'exercices

➤ **Définition**. On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

Exo-W 1. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$

Soit n un entier naturel. Selon la formule du changement de variable :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \underbrace{=}_{u=\frac{\pi}{2}-t} \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t = I_n$$

Exo-W 2. — Montrer que la suite (I_n) est positive, décroissante, convergente.

➢ Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,\pi/2]$, on a : $\cos^n(t) \geqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$. La suite (I_n) est positive.

➢ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leqslant 0}\mathrm{d}t$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

➢ La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) : donc elle est convergente (théorème de la limite monotone).

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $(n+1)\, I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Deux calculs immédiats donnent $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(n+2)\, I_{n+2} I_{n+1} = (n+2)\,\frac{n+1}{n+2}\, I_n I_{n+1} = (n+1)\, I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$$

la première égalité provenant de la question de cours 1, et la dernière de l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2} \qquad (\spadesuit)$

La suite (I_n) étant décroissante et positive, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

Supposons $\ell > 0$. Alors : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_{n+1} = \ell$ *. D'où : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_{n+1} I_n = \ell^2 > 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (n+1) I_{n+1} I_n = +\infty$. Contradiction avec $(\spadesuit)$.

Il s'ensuit que $\ell = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

*. Admis à ce stade de l'année.

Exercice 1. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

On a : $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

En posant $u = \mathrm{e}^x$ dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int \frac{2}{2+u+\dfrac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int \frac{2}{u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{u+1}$$

Finalement : $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$

Exercice 2. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+6}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $]6,+\infty[$)

Soit x un réel > 6. On a : $\displaystyle\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{1}{(x-1)(x-6)}.$

Il existe donc deux réels a et b tels que : $\displaystyle\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-6}$ (♠) (décomposition en éléments simples).

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation [†] :

➢ **Calcul de** a. $(x-1)\times(♠) \iff \displaystyle\frac{1}{x-6} = a + \frac{b(x-1)}{x-6}$. Par évaluation en 1 : $a = -\dfrac{1}{5}$

➢ **Calcul de** b. $(x-6)\times(♠) \iff \displaystyle\frac{1}{x-1} = \frac{a(x-6)}{x-1} + b$. Par évaluation en 6 : $b = \dfrac{1}{5}$

Ainsi : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\left(\frac{x-6}{x-1}\right)^{1/5}\right)$

Exercice 3. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $]-\pi/2,\pi/2[$)

Changement de variable : $u = \tan(x/2)$; $x = 2\arctan(u) \implies \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,\mathrm{d}u$$

Il existe deux réels a et b tels que : $\displaystyle\frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}$ (♠) (décomposition en éléments simples).

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation :

➢ **Calcul de** a. $(1-u)\times(♠) \iff \displaystyle\frac{1}{1+u} = a + \frac{b(1-u)}{1+u}$. Par évaluation en 1 : $a = \dfrac{1}{2}$

➢ **Calcul de** b. $(1+u)\times(♠) \iff \displaystyle\frac{1}{1-u} = \frac{a(1+u)}{1-u} + b$. Par évaluation en -1 : $b = \dfrac{1}{2}$

Ainsi : $\displaystyle\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-u)+\ln(1+u)\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)$

Finalement : $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}}\right)$

†. Plus que celle d'identification, à utiliser in articulo mortis.

Exercice 4. — Calcul de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

On a : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\right)$

Or : $\displaystyle\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{5}\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x)\right)$. Par suite : $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\left(2\cos(2x)+\sin(2x)\right)$

Finalement : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\left(2\cos(2x)+\sin(2x)\right)$

Exercice 5. — On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

1/ Montrer que (I_n) tend vers 0.

Pour tout $(x,n)\in[0,1]\times\mathbb{N}$ on a : $\displaystyle 0\leqslant \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}$.

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle 0\leqslant I_n\leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}$.

Par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to 0} I_n = 0$.

2/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\frac{1}{n!} = I_{n-1}-I_n$

Soit n un entier naturel non nul. On a : $\displaystyle I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_{v(x)}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'(x)}\,\mathrm{d}x$

Selon la formule d'intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{n!}\left(\left[(1-x)^n\mathrm{e}^x\right]_0^1 + n\int_0^1 (1-x)^{n-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}_{I_{n-1}}$$

Ainsi : $\displaystyle I_n = -\frac{1}{n!}+I_{n-1}$. On en déduit que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!} = I_{n-1}-I_n$.

3/ En déduire que : $\displaystyle\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{=}_{Chasles} 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \underbrace{=}_{q.\,2} 1+\sum_{k=1}^n (I_{k-1}-I_k) \underbrace{=}_{télescop} 1+I_0-I_n$$

Or : $\displaystyle I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$. Il s'ensuit que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^n\frac{1}{k!} = \mathrm{e}-I_n$ ($\spadesuit$).

Or, selon la q.1, on a : $\displaystyle\lim_{n\to 0} I_n = 0$.

On en déduit, avec ($\spadesuit$), que : $\displaystyle\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$

Remarque (non-exigible en colle à ce stade de l'année). Plus tard cette année, nous noterons ce résultat :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

On dira alors que *la série de terme général* $\displaystyle\frac{1}{k!}$ *est convergente et a pour somme* e (dans le chapitre sur les séries).

On prouvera également une version plus générale de ce résultat : $\displaystyle\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$