Colle 9 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Intégrales de Wallis (relation de récurrence).**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2]\,, \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]\,, \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+2} = \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t$

C'est-à-dire : $I_{n+2} = (n+1)\, I_n - (n+1)\, I_{n+2}$ d'où : $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n}$

Question de cours 2 — **Intégrales de Wallis, cas impair.** On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ (en admettant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$).

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $\quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier naturel p.

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et d'autre part $\frac{2^0\,(0!)^2}{1!} = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p.

On a : $I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3}\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^2(p+1)^2}{2(p+1)(2p+3)}\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)}\,[(p+1)!]^2}{(2p+3)!}$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$

Question de cours n^{0}3 — **Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène).** Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I.
Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ ($k \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Preuve. Notons (E) l'EDL : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
La fonction b/a est continue sur I (H+TG). A ce titre, b/a admet des primitives sur I ; notons A l'une d'entre elles.
Soit φ une solution de (E). Définissons une fonction g en posant : $\forall x \in I,\ g(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
La fonction g est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur I, et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\,\varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}\,\varphi(x)\right)$$

La fonction a ne s'annulant pas sur I, cette dernière assertion est encore équivalente à la suivante :

$$\forall x \in I,\ a(x)g'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,\underbrace{\left(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)\right)}_{=0}$$

la nullité de la parenthèse du terme de droite provenant de ce que φ est solution de (E).
Par suite : $\forall x \in I,\ a(x)g'(x) = 0$ d'où $\forall x \in I,\ g'(x) = 0$ (puisque a ne...).

Il s'ensuit que g est constante sur I, explicitement :

$$\exists\, k \in \mathbb{K},\ g(x) = k \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x)\mathrm{e}^{A(x)} = k \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{K},\ \varphi(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$$

On vient donc d'établir que toute solution de (E) est "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$".

La réciproque (toute fonction "de la forme $k\mathrm{e}^{-A(x)}$" est solution de (E)) est une vérification aisée qui permet de conclure :

> Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ $(k \in \mathbb{K})$, où A désigne une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$.

> Question de cours n^{0}4 — "La méthode de variation de la constante marche à tous les coups".
>
> Plus précisément, avec les notations et hypothèses de la question de cours 3, il existe une fonction $K \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que la fonction f_p définie par
>
> $$\forall\, x \in I, \qquad f_P(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{(où } A \text{ est une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I\text{)}$$
>
> est solution de l'équation différentielle (E).

Preuve. Soit $K \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. Posons : $\forall\, x \in I,\ f_P(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (H+TG). A ce titre, elle est dérivable sur I et :

$$\forall\, x \in I,\ f'_P(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - A'(x)K(x)\right) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
& f_P \text{ est solution de } (E) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)f'_P(x) + b(x)f_P(x) = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\right) + b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}K'(x) \underbrace{-b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + b(x)K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}_{=0} = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}K'(x) = c(x) \\
& \Longleftrightarrow \forall\, x \in I,\ K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\mathrm{e}^{A(x)} \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème et les théorèmes généraux sur la continuité assure que la fonction $x \longmapsto \dfrac{c(x)}{a(x)}\mathrm{e}^{A(x)}$ est continue sur I ; elle admet donc une primitive sur I. En d'autres termes, il existe une fonction K de classe $\mathscr{C}^1$ sur I satisfaisant l'identité $(\spadesuit)$. On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \longmapsto K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est solution de (E).

> Question de cours n^{0}5 — **Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1)**. Soient a, b et c trois fonctions de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, tque a ne s'annule pas sur I.
>
> On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
>
> Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :
>
> $$\begin{cases} \forall\, x \in I, \quad a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Preuve. Prouvons le théorème. Avec les notations de l'énoncé, la QC4 **qui sera admise dans cette question de cours**, assure qu'il existe une solution f_P de (E).

Soit φ une solution arbitraire de (E). Il existe un scalaire K tel que : $\forall\, x \in I,\ \varphi(x) = f_P(x) + K\mathrm{e}^{-A(x)}$.

Considérons à présent un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ arbitraire. On a :

$$\varphi(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow f_P(x_0) + K\mathrm{e}^{-A(x_0)} = y_0 \Longleftrightarrow K = \left(y_0 - f_P(x_0)\right)\mathrm{e}^{A(x_0)}$$

On en déduit que la fonction φ définie en posant :

$$\forall\, x \in I,\ \varphi(x) = f_P(x) + \left(y_0 - f_P(x_0)\right)\mathrm{e}^{A(x_0) - A(x)}$$

est l'unique solution de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Banque d'exercices

➤ **Définition**. On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

Exo-W 1. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$

Exo-W 2. — Montrer que la suite (I_n) est positive, décroissante, convergente.

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 1. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

Exercice 2. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+6}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $]6,+\infty[$)

Exercice 3. — Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $]-\pi/2, \pi/2[$)

Exercice 4. — Calcul de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ (primitive sur $\mathbb{R}$)

L'exercice 5 est finalement hors-programme de la banque ; ce qui ne vous empêche pas de le travailler, il permet d'obtenir un joli résultat à l'aide de non moins jolies applications du cours !

Exercice 5. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\, dx$

1/ Montrer que (I_n) tend vers 0.

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n$

3/ En déduire que : $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$