Colle 10 – Questions de cours

Question de cours n⁰4 — **Propriété (Principe de superposition)**.
Soient a et b deux scalaires (deux éléments de $\mathbb{K}$), et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $c_1, \dots, c_n$ n fonctions dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
Soient $f_1, \dots, f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $y'' + ay' + by = c_i$.
Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

la fonction $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$.

Preuve. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'' + a\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)' + b\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'' + a\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i' + b\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(f_i'' + af_i' + bf_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y'' + ay' + by = c_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ce qui signifie que φ est solution de l'EDL $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, ce qu'il fallait démontrer.

Question de cours n⁰1 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α n'est pas racine de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α n'est pas racine de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = K\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}$ et ${f_P}''(x) = K\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)$.

Puisque $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff \left[K\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right) = 1\right] \iff \left[K = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b}\right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC) (donc $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = \dfrac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b}\mathrm{e}^{\alpha x}$, est solution de (E).

Question de cours n⁰2 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α est racine simple de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx\mathrm{e}^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine simple de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx\mathrm{e}^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha x + 1)$ et ${f_P}''(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2 x + 2\alpha\right)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2 x + 2\alpha + a\alpha x + a + bx\right)$.

Puisque $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff \left[K\left(\underbrace{\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)}_{=0}x + 2\alpha + a\right) = 1\right] \iff \left[K = \frac{1}{2\alpha + a}\right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α est racine simple de (EC) (donc $2\alpha + a \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = \dfrac{1}{2\alpha + a}x\mathrm{e}^{\alpha x}$, est solution de (E).

Question de cours n^{0}3 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α est racine double de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine double de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha x^2 + 2x\right)$ et ${f_P}''(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2x^2 + 4\alpha x + 2\right)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2x^2 + 4\alpha x + 2 + a\alpha x^2 + 2ax + bx^2\right)$

$$\Longleftrightarrow {f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\Bigg(\underbrace{\alpha^2 + a\alpha + b}_{=0}\Bigg)x^2 + 2\Bigg(\underbrace{2\alpha + a}_{=0}\Bigg)x + 2\right]$$

Puisque $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \Longleftrightarrow [2K = 1] \Longleftrightarrow \left[K = \frac{1}{2}\right]$$

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{\alpha x}$, est solution de (E).

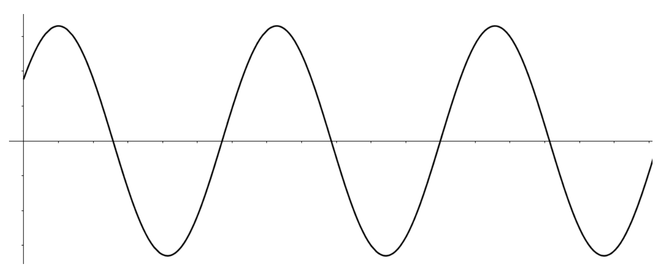
Question de cours n^{o}5 — **Physique-Maths**. Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution g$^{\underline{\text{ale}}}$ peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$

On suppose que $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on note (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' + \omega_0^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm \mathrm{i}\omega_0$.[*]
On en déduit que la solution générale[†] est : $\boxed{f(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \text{ (avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels).}}$

Fixons à présent les réels C_1 et C_2, avec $(C_1, C_2) \neq (0,0)$. On a pour tout réel t :

$$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin(\omega_0 t)\right) \qquad \text{puis on pose : } X = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \text{ et } Y = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

Le couple de réels (X, Y) vérifie clairement la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Par suite, le complexe $X + \mathrm{i}\,Y$ est un élément de $\mathbb{U}$, et il existe donc un unique réel $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $X = \cos\varphi$ et $Y = \sin\varphi$. Par suite :
$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\cos\varphi\cos(\omega_0 t) + \sin\varphi\sin(\omega_0 t)\right)$ d'où : $f_{C_1,C_2}(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos(\omega_0 t - \varphi)$
Le cas $(C_1, C_2) = (0,0)$ est trivial (prendre $K = 0$ et φ arbitraire).



Conclusion. La solution générale de (H) est : $\forall\ (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3,\ f(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$ (régime périodique).

*. Qui sont effectivement distinctes puisque ω_0 est non nul par hypothèse.
†. Càd l'ensemble des fonctions solutions de (H) à valeurs *réelles*.

Complément — Géométrie des équations différentielles

*Ce complément n'est donné qu'à titre d'information, et n'est pas exigible en colle. D'une certaine façon, il sert à préparer la suite du cours ; plus précisément, il illustre la notion d'**espace vectoriel** qui, pour faire très court, généralisera les notions de plan et d'espace usuels.*

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan réel. L'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$:

$$\mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\lambda\,\overrightarrow{u}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\}$$

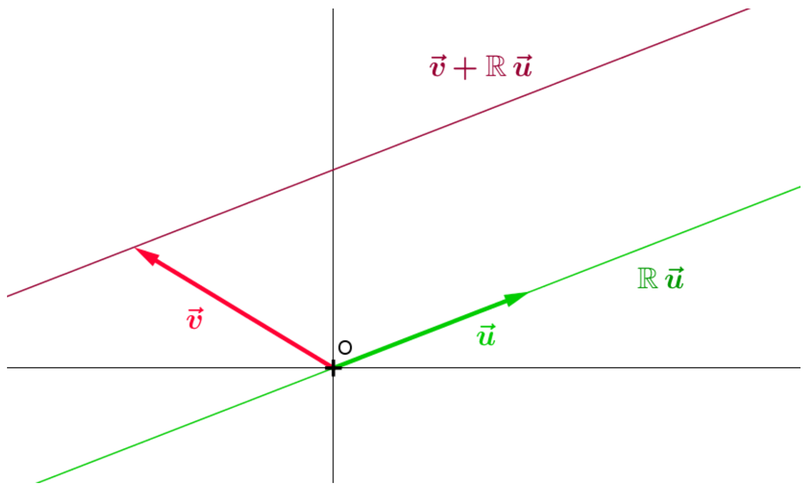
est une droite qui passe par l'origine du plan (on parle alors de droite *vectorielle*).

Considérons un second vecteur $\overrightarrow{v}$, non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. L'image de $\mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est une droite :

$$\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\overrightarrow{v} + \lambda\,\overrightarrow{u}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\}$$

qui bien évidemment ne passe plus par l'origine du plan (on parle alors de droite *affine*).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



Fin du premier acte.

Sous les hypothèses à présent usuelles, l'ensemble des solutions d'une EDL1 homogène ($ay' + by = 0$) est l'ensemble des fonctions colinéaires à e^{-A}, où A désigne une primitive de b/a. On peut donc noter cet ensemble :

$$\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{\lambda\,\mathrm{e}^{-A}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

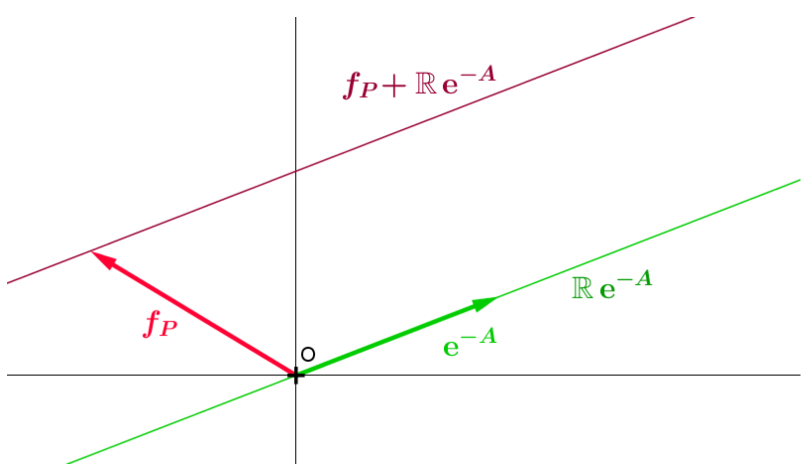
Par analogie avec la situation précédente, on dira que c'est une droite vectorielle (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Considérons à présent une solution particulière f_P de l'EDL1 $ay' + by = c$ (avec c non nulle). La fonction f_P est non colinéaire à e^{-A} (sinon elle serait solution de l'équation homogène). L'image de $\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A}$ par la translation de "vecteur" f_P

$$f_P + \mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{f_P + \lambda\,\mathrm{e}^{-A}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

est une droite affine (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



Banque d'exercices

Exercice 1. — Une EDL1. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad x\,y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

Exercice 2. — Physique-Maths. Oscillateur harmonique libre, avec frottements :
résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

Exercice 3. — Application du principe de superposition. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)$.

Exercice 4. — Application du "pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$". Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de
$y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$

Exercice 5. — Classique ! Notons (H) l'EDL2 homogène : $y'' + ay' + by = 0$, avec a et b dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
On a : $\quad [f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})]$

Exercice 6. — EDL1 et formule de Leibniz.* Soit f la fonction définie sur $I = \,]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l'EDL1 : $\quad (1+x)\,y' - \alpha y = 0$.

2/ En déduire que : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\,f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)$

*** : sur le principe du volontariat. Un.e étudiant.e à qui l'on propose de faire cet exercice peut demander un autre exo de la banque, sans dévalorisation de sa note.**

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Une EDL1. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$(\text{E}) \qquad x\,y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

L'intervalle de résolution est donc $\mathbb{R}_+^*$ (imposé par l'énoncé) ; sur celui-ci, les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$ sont continues ‡ selon les théorèmes généraux, et la première ne s'annule pas.

➤ **Equation homogène associée**. Avec les notations du cours, on a pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = x\,; \quad b(x) = 1\,; \quad \text{d'où } \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x} \quad . \text{ On peut donc poser : } A(x) = \ln(x)$$

Conclusion. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall\,(x,K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f_K(x) = \dfrac{K}{x}$

➤ **Solution particulière de (E)**. On peut rechercher une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall\,x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, où K désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse faite sur K implique que f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\,x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_P(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2}$$

Par suite, f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\,x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{K'(x)x^2 - xK(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x} = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x) \Longleftrightarrow \forall\,x \in \mathbb{R}_+^*,\ K'(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

Or :

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-1+3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1+3\mathrm{i}}{10}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\right)$$

Finalement : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{10}\left(3\sin(3x) - \cos(3x)\right)$.

Une solution particulière de (E) est donc : $\boxed{\forall\,x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10x}\left(3\sin(3x) - \cos(3x)\right)}$.

Conclusion. La solution générale de (E) est : $\forall\,(x,K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ g_K(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10x}\left(3\sin(3x) - \cos(3x)\right) + \dfrac{K}{x}$

Exercice 2. — Physique-Maths. Oscillateur harmonique libre, avec frottements :
résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

On considère l'EDL2 : (H) $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec m et ω_0 strictement positifs. L'équation caractéristique associée est : (EC) $r^2 + 2mr + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4\left(m^2 - \omega_0^2\right)$.

On distingue alors trois cas :

➤ Si $\Delta < 0$ (càd si : $m < \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines complexes conjuguées $-m \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - m^2}$. Dans ce cas ("frottements faibles"), la solution générale de (H) est :

$$\boxed{\forall\,(t,C_1,C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f(t) = \left(C_1\cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2}\right)t\right) + C_2\sin\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2}\right)t\right)\right)\mathrm{e}^{-mt} \text{ (régime pseudo-périodique)}}.$$

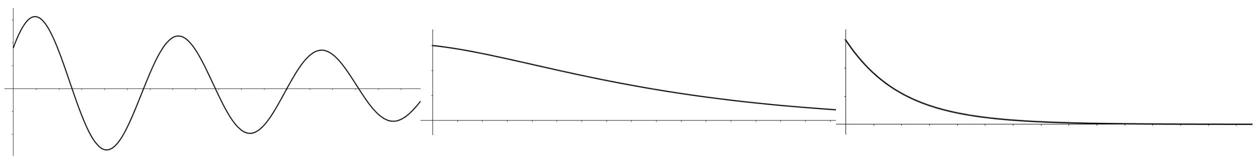
➤ Si $\Delta = 0$ (càd si : $m = \omega_0$) : alors (EC) possède une racine double (réelle) : $-m$. Dans ce cas, la solution générale de (H) est :

$$\boxed{\forall\,(t,C_1,C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f_{C_1,C_2}(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{-mt} \text{ (régime critique)}}.$$

‡. Et même de classe $\mathscr{C}^\infty$.

➤ Si $\Delta > 0$ (càd si : $m > \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines réelles (et strictement négatives) $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \omega_0^2}$. Dans ce cas ("frottements importants"), la solution générale de (H) est :

$$\boxed{\forall\ (t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f_{C_1,C_2}(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2\, t}\ \text{(régime apériodique)}}.$$



Cas $\Delta < 0$ Cas $\Delta = 0$ Cas $\Delta > 0$

Exercice 3. — Application du principe de superposition. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)$.

Notons que : $[y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)] \Longleftrightarrow [y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}]$

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique a 1 et 2 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto\ C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} \quad \text{(avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels)} \qquad (\heartsuit)}$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E_1) admet une solution particulière de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$ (avec K réel). Posons donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = K\mathrm{e}^{-x}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer ses dérivées successives. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = -K\mathrm{e}^{-x}$ et $\varphi''(x) = K\mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{-x}\,(1 + 3 + 2) = \mathrm{e}^{-x} \Longleftrightarrow K = \frac{1}{6}$$

On en déduit que la fonction : $\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-x} \text{ est solution de } (E_1)\ \ (\spadesuit)}$.

On introduit à présent l'équation (E_2) : $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, (E_2) admet une solution particulière de la forme $Kx\mathrm{e}^x$ (avec K réel). Posons donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = Kx\mathrm{e}^x$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$... Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = K\mathrm{e}^x\,(x + 1)$ et $\varphi''(x) = K\mathrm{e}^x\,(x + 2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^x\,(x + 2 - 3x - 3 + 2x) = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow K = -1$$

On en déduit que la fonction : $\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -x\mathrm{e}^x \text{ est solution de } (E_2)\ \ (\clubsuit)}$.

➤ D'après ($\clubsuit$), ($\spadesuit$) et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^x \text{ est solution de } (E)\ \ (\diamondsuit)}$$

➤ D'après ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$), la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^x + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} \quad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels)}}$$

Exercice 4. — **Application du "pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$"**. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de

$$y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$$

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 5y' + 6y = 0$. L'équation caractéristique a 2 et 3 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E') : $y'' - 5y' + 6y = e^{ix}$.

Puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E') admet une solution particulière de la forme Ke^{ix} (avec K complexe). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = Ke^{ix}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer les dérivées successives de φ. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = iKe^{ix}$ et $\varphi''(x) = -Ke^{ix}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -Ke^{ix} - 5iKe^{ix} + 6Ke^{ix} = e^{ix} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-1 - 5i + 6)\, Ke^{ix} = e^{ix} \iff K\,(5 - 5i) = 1 \iff K = \frac{1}{5 - 5i}$$
$$\iff K = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$$

On en déduit que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i\right) e^{ix}$ est solution de (E'). Il ne reste plus qu'à en déterminer la partie réelle pour avoir une solution de (E). Explicitement, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{10}\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$$

est une solution particulière de (E).

Conclusion. La solution générale de l'équation (E) $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$ est

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{10}\left(\cos(x) - \sin(x)\right) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Exercice 5. — **Classique !** Notons (H) l'EDL2 homogène : $y'' + ay' + by = 0$, avec a et b dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

On a : $[f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})]$

Il s'agit de montrer que sous les hypothèses de l'énoncé, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel n.

Puisque f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori de classe $\mathscr{C}^1$ et de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.[§]

Cette observation faite, notons pour tout entier naturel n l'assertion $\mathrm{P}(n)$: $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

D'après ce qui précède, les assertions $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$; ainsi $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Par hypothèse : $f'' + af' + bf = 0$. En dérivant $(n-2)$ fois cette relation, on a : $f^{(n)} + af^{(n-1)} + bf^{(n-2)} = 0$.

D'où : $f^{(n)} = -af^{(n-1)} - bf^{(n-2)}$. Or $f^{(n-1)}$ et $f^{(n-2)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; il s'ensuit que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on a : $[f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})]$

Exercice 6. — **EDL1 et formule de Leibniz.** Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1 + x)^\alpha \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l'EDL1 : $(1 + x)\, y' - \alpha y = 0$.

Par hypothèse, f est dérivable sur I, et : $\forall x \in I,\ (1 + x) f'(x) = (1 + x)\alpha(1 + x)^{\alpha - 1} = \alpha(1 + x)^\alpha$

Il s'ensuit que : $\forall x \in I,\ (1 + x) f'(x) = \alpha f(x)$. D'où la conclusion.

§. Qui peut le plus peut le moins !

2/ En déduire que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$

Selon les TG, $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Soit k un entier naturel. En dérivant k fois la relation

$$\forall\, x \in I,\ (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

on obtient :

$$\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x) \quad (\spadesuit) \qquad \text{en ayant posé } u(x) = 1 + x$$

Or selon la formule de Leibniz : $\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f'^{(k-j)}(x)$

En observant que $u^{(j)}$ est nulle pour tout entier $j \geqslant 2$, on en déduit que :

$$\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{1} \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f^{(k-j+1)}(x) = (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\forall\, x \in I,\ (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x)$

En particulier : $f^{(k+1)}(0) + kf^{(k)}(0) = \alpha f^{(k)}(0)$. **Conclusion.** $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

Posons pour tout entier naturel non nul k l'assertion $\mathrm{P}(k)$: "$f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$"

Pour $k = 1$, on a : $f'(0) = \alpha$ et $\displaystyle\prod_{j=0}^{0} (\alpha - j) = \alpha$. Donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathrm{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel non nul k. D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence on a :

$$f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k) \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \quad \text{d'où :} \quad f^{(k+1)}(0) = \prod_{j=0}^{k} (\alpha - j)$$

Ce qui signifie que $P(k+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$