MPSI – Colle 10 (2 au 6 décembre 2024) : EDL1 & 2

Chapitre 9 : Equations différentielles linéaires

Convention : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$.

Méthode "universelle" de résolution pour une EDL 1 ou 2 :

(i) Résolution de l'équation homogène (H) associée à (E)

(ii) Détermination d'une solution particulière de (E)

(iii) Conclusion : la solution générale de (E) est $S_H + S_P$ où S_H désigne la solution générale de (H) et S_P une solution particulière de (E).

1 – Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

Cf programme de colle 9.

2 – Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL2)

Dans ce paragraphe, on suppose que **les coefficients de l'EDL2 sont constants**, c'est-à-dire que l'on considèrera l'équation

$$\boxed{(E)\ y'' + ay' + by = c(x), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{K}, \text{ et } d \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})}.$$

(i) La solution pour le premier point est donnée par les deux énoncés suivants :

Théorème (solution générale d'une EDL2 homogène, cas complexe). Mêmes notations que ci-dessus (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède :

- une racine double α_0 $(\Delta = 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1,C_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{C_1,C_2}(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{\alpha_0\, t}$ (C_1 et C_2 complexes)
- deux racines distinctes α et β $(\Delta \neq 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1,C_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par : $f_{C_1,C_2}(t) = C_1\mathrm{e}^{\alpha\, t} + C_2\mathrm{e}^{\beta\, t}$ (C_1 et C_2 complexes)

Théorème (solution générale d'une EDL2 homogène, cas réel). Mêmes notations que précédemment. Si l'équation caractéristique possède :

- deux racines réelles α et β $(\Delta > 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1,C_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1,C_2}(t) = C_1\mathrm{e}^{\alpha\, t} + C_2\mathrm{e}^{\beta\, t}$ (C_1 et C_2 réels)
- une racine double α_0 $(\Delta = 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1,C_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1,C_2}(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{\alpha_0\, t}$ (C_1 et C_2 réels)
- deux racines complexes conjuguées $\alpha = u + iv$ et $\beta = u - iv$ $(\Delta < 0)$: les solutions de (H) sont les fonctions $f_{C_1,C_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $f_{C_1,C_2}(t) = \mathrm{e}^{ut}\left(C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt)\right)$ (C_1 et C_2 réels).

(ii) Et pour le second point (recherche d'une solution particulière de (E)), on se restreint à la recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $\mathrm{e}^{\alpha\, x}$.

Propriété (solution particulière d'une EDL2). Soient a, b et α trois scalaires (3 éléments de $\mathbb{K}$). Notons (E) $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$. Si le scalaire α...

- n'est pas racine de l'équation caractéristique : alors (E) admet une solution particulière de la forme $K\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$) ;
- est racine de l'équation caractéristique, mais pas racine double $(\Delta \neq 0)$: alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kx\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$) ;
- est racine double de l'équation caractéristique $(\Delta = 0)$: alors (E) admet une solution particulière de la forme $Kx^2\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ (avec $K \in \mathbb{K}$).

Propriété (principe de superposition des solutions particulières). Soient a, b deux scalaires ; $(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout entier i compris entre 1 et n, on note

$$(E_i) : \quad y'' + ay' + by = c_i$$

On suppose encore que $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, telles que f_i est solution de (E_i) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de l'EDL : $(E) \quad y'' + ay' + by = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$

Application : résolution de $y'' - 3y' + 2y = 4\mathrm{ch}(x)$.

Propriété ("Pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$" pour les EDL). Soient a et b deux réels. Soient $c \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

[φ est solution de $y'' + ay' + by = c$]

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \mathrm{Re}(c) \\ \\ \mathrm{Im}\,(\varphi) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \mathrm{Im}(c) \end{bmatrix}$$

Application : résolution de $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$.

3 – Exemple d'application : l'oscillateur harmonique $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = \dots$

➤ EDL de l'oscillateur harmonique libre

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec $m > 0$.

Trois cas sont à distinguer : $m < \omega_0$, $m = \omega_0$, ou $m > \omega_0$.

➤ *EDL de l'oscillateur harmonique forcé*

On considère ici l'équation $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t)$ avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

Par rapport à l'étude précédente, outre le fait que l'on doit trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on doit distinguer un nouveau sous-cas : celui où $m = 0$ et $\omega = \omega_0$ (résonance).

Questions de cours

- ➤ **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec α non racine de l'équation caractéristique.
- ➤ **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec α racine simple de l'équation caractéristique.
- ➤ **Propriété** : solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec α racine double de l'équation caractéristique.
- ➤ **Propriété (principe de superposition des solutions particulières)**.
- ➤ **Physique-Maths**. Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution g$^{\underline{\text{ale}}}$ peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K\cos(\omega_0 t - \varphi)$.

Objectifs de la semaine

- ➤ Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL1 (en particulier la méthode de variation de la constante)
- ➤ Déterminer la primitive d'une fonction (primitives usuelles, IPP, changement de variable)
- ➤ Connaître le plan et la méthode de résolution d'une EDL2 (en particulier les différentes techniques de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre)
- ➤ Afin de maîtriser les 3 points précédents : vous entraîner, vous entraîner, vous entraîner (par exemple en refaisant les calculs de primitives, et les résolutions d'EDL1 et 2 du cours).