Colle 11 – Questions de cours

Question de cours n^{o}1 — **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** (ce que l'on note $(u_n) \sim (v_n)$) s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

➤ **Réflexivité**. Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient"). Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \sim (u_n)$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

➤ **Symétrie**. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n)) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2,\ ((u_n) \sim (v_n)) \Longrightarrow ((v_n) \sim (u_n))$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

➤ **Transitivité**. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n)\, u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^3,\ ((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \Longrightarrow ((u_n) \sim (w_n))$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Conclusion. La relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question de cours n^{o}2 — **Limite d'une somme** : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ'. Alors $u+v$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ'.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme u a pour limite ℓ : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\spadesuit)$

Comme v a pour limite ℓ' : $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_1 \Longrightarrow |v_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\clubsuit)$

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout entier $n \geqslant n_2$, les deux inégalités ci-dessus sont satisfaites, et on a donc :

$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon$ (la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire).

En résumé, on a établi que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_2 \Longrightarrow |u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u et v convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors $u+v$ converge vers $\ell + \ell'$

Question de cours n^{o}3 — **Propriété** : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0 **ET** application : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n}\arctan(n) = 0$

Soient v une suite convergeant vers 0, et u une suite bornée.

Puisque u est bornée, il existe un réel strictement positif M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M \quad (\spadesuit)$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme v a pour limite 0 : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Longrightarrow |v_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}\right) \quad (\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n v_n| < M \times \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\right)$

En résumé, on a établi que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n v_n| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u est bornée, et v tend vers 0, alors suite uv tend vers 0.

Application. Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{-n}\arctan(n)$. La suite de terme général $\arctan(n)$ est bornée (entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$), et la suite de terme général e^{-n} tend vers 0. Selon la propriété précédente, on peut affirmer que : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^{-n}\arctan(n) = 0}$.

Question de cours n^{o}4 — **Théorème (de la limite monotone)** : toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Soit u une suite croissante et majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

Notons $E = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite u. Cet ensemble est une partie non vide (par définition) et majorée (par hypothèse) de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que E admet une borne supérieure, d'après la propriété du même nom (qui est valide dans $\mathbb{R}$). Notons : $S = \sup E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété caractérisant la borne supérieure, il existe un entier naturel n_0 tel que : $S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant S$.

Or, u étant croissante (par hypothèse) et majorée par S, on en déduit que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant S, \text{ d'où : } \forall\, n \geqslant n_0,\ S - \varepsilon < u_n \leqslant S \text{ ce qui implique : } \forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - S| < \varepsilon)$. Donc la suite u est convergente et a pour limite S.

Conclusion. Si u est croissante et majorée, alors u est convergente.

Dans l'autre situation (celle où u est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la suite $(-u)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-u)$ converge si et seulement si u converge.

Question de cours n^{o}5 — **Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes")** : soient u, v et w trois suites réelles telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leqslant v \leqslant w$
- u et w sont convergentes et $\lim u = \lim w$

Alors v converge et $\lim v = \lim u = \lim w$.

Soient u et w deux suites convergentes, avec $\lim u = \lim w$. Notons : $\ell = \lim u = \lim w$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Par hypothèse : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n)$
- Comme u a pour limite ℓ : $\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_1 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$
- Comme w a pour limite ℓ : $\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_2 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon)$

Posons : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_3$, les 3 conditions précédentes sont réalisées, et on a donc :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon \text{ d'où en particulier : } \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon \text{ soit : } |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_3 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_3 \Longrightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$.

Conclusion. Donc la suite v est convergente et a pour limite $\ell = \lim u = \lim w$.

Remarque. Les deux questions de cours qui suivent sont basées sur le principe du "volontariat" : ce qui signifie qu'un.e étudiant.e à qui l'une de ces questions de cours serait proposée peut en demander une autre, sans pénalité pour sa note.

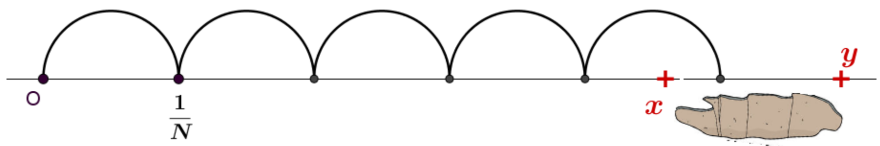
Question de cours "Superstar 1" — **Théorème** : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit de prouver qu'il existe un nombre rationnel entre deux réels distincts. Considérons deux réels x et y, tels que $x < y$.

➤ Si $x < 0$ et $y > 0$: alors 0 (qui est rationnel !) est compris entre x et y.

➤ Si $0 \leqslant x < y$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel non nul N tel que : $N(y-x) > 1$ et il existe un entier naturel M tel que $M/N > x$.

Remarque : la figure ci-dessous illustre ces choix, dont on explique ici l'origine très informellement.



Entre x et y, il y a un trou, de longueur $y - x$. Pour être certain de tomber dans ce trou en partant de zéro, on doit s'assurer de deux conditions : ne pas faire des pas trop longs (sinon on pourrait passer au-dessus du trou), et en faire suffisamment.

Pour remplir la première, on choisit de faire des pas de longueur $1/N$ (qui est rationnel), de telle sorte que : $1/N < (y-x)$ (longueur d'un pas < longueur du trou). Ce qui équivaut à : $N(y-x) > 1$.

Pour remplir la seconde, on observe qu'il faut au moins dépasser x pour tomber dans le trou. Or, $\mathbb{R}$ étant archimédien, quitte à faire assez de pas de longueur $1/N$, on dépassera x. Càd : il existe un entier M assez grand pour que $M \times (1/N) > x$.

Considérons l'ensemble : $E = \left\{k \in \mathbb{N} \,/\, \dfrac{k}{N} \leqslant x\right\}$. Cet ensemble est non vide, puisque 0 y appartient. En outre, pour tout élément k de E, on a : $(k/N) \leqslant x < (M/N)$ d'où en particulier $k < M$. Donc E est majoré (par M).

En résumé : E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée. A ce titre elle admet un plus grand élément, que nous noterons : N_0. On a alors : $N_0 \in E$ et $N_0 + 1 \notin E$ (sinon N_0 ne serait pas le plus grand élément !). D'où : $\boxed{\dfrac{N_0}{N} \leqslant x < \dfrac{N_0+1}{N} \qquad (\spadesuit)}$.

Par ailleurs, puisque $N(y-x) > 1$, on a : $y > x + \dfrac{1}{N}$. On déduit de cette inégalité et de $\dfrac{N_0}{N} \leqslant x$ que : $\boxed{\dfrac{N_0+1}{N} < y \qquad (\clubsuit)}$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\boxed{x < \dfrac{N_0+1}{N} < y}$, ce qui prouve l'existence d'un rationnel entre x et y.

➤ Si $x < y \leqslant 0$: posons $X = -x$ et $Y = -y$. D'après ce que nous venons d'établir plus haut, il existe un rationnel r tel que : $Y < r < X$. Donc $x < -r < y$, d'où la conclusion puisque l'opposé d'un rationnel est encore un rationnel.

Synthèse : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists r \in \mathbb{Q},\ x < r < y \qquad$ ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

Conséquence inratable, néanmoins de démonstration non exigible en colle (ce qui précède suffit largement !) :

Corollaire 1. — Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Cet énoncé provient de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et de la caractérisation séquentielle de la densité.

Question de cours "Superstar 2" — **Théorème** : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

L'idée est ici d'utiliser la caractérisation séquentielle de la densité, et de prouver que tout réel est limite d'une suite de décimaux.

Soit x un réel. On définit la suite u (*resp.*v) des approximations décimales par défaut (*resp.*par excès) de x en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad (\textit{resp.}\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n})$$

Observons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{D} \wedge v_n \in \mathbb{D}$.

Pour tout entier naturel n, on a : $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x \leqslant v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad (\spadesuit)}$

Pour tout entier naturel n, on a également : $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x \Rightarrow 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x$. Par croissance de la partie entière, on en déduit que : $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$.

En divisant les deux termes de cette inégalité par 10^{n+1}, on obtient : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}}$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Ainsi : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.} \quad (\clubsuit)}$

Symétriquement, on a pour tout n entier naturel : $10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \Rightarrow 10^{n+1} x < 10 (\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$. Par croissance de la partie entière, on en déduit que : $10 (\lfloor 10^n x \rfloor + 1) \geqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$.

D'où : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \geqslant \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1}{10^{n+1}}$, soit $v_n \geqslant v_{n+1}$. Ainsi : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.} \quad (\heartsuit)}$

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = 10^{-n}$. D'où : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0. \quad (\diamondsuit)}$

➤ Il résulte de ($\clubsuit$), ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$) que les suites u et v sont adjacentes. D'après le théorème du même nom, u et v convergent vers une limite commune ℓ. Il découle alors de ($\spadesuit$) et de la stabilité des inégalités larges par passage à la limite que $\ell = x$.

Ainsi, le réel x est limite d'une (et même de deux !...) suite de décimaux.

Puisque x est un réel arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que tout réel est limite d'une suite de décimaux. D'où la conclusion, par caractérisation séquentielle de la densité.

Conclusion. $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \cos(n)$.
Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(u_n = u_p) \Longleftrightarrow (n = p)$

Exercice 2. — Combat des chefs 1. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Exercice 3. — Combat des chefs 2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Exercice 4. — De l'utilité des équivalents 1. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{\mathrm{e}^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Exercice 6. — Encadrement de $\zeta(2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1/ Justifier brièvement que pour tout entier $k \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

2/ En déduire que la suite (Z_n) est majorée par 2.

3/ Etablir que la suite (Z_n) est convergente, et que sa limite ℓ appartient à $[1,2]$.

Exercice 7. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \cos(n)$.

Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(u_n = u_p) \Longleftrightarrow (n = p)$

Soient n et p dans $\mathbb{N}$ tels que : $u_n = u_p$, càd : $\cos(n) = \cos(p)$.

On a alors : $n = \pm p\ [2\pi]$. D'où $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ n = \pm p + 2k\pi$. Il s'ensuit que : $2k\pi = n \pm p$.

Supposons que $k \neq 0$. Alors on peut écrire : $\pi = \dfrac{n \pm p}{2k}$.

On a ainsi écrit π comme le quotient de deux entiers relatifs. Ce qui prouve que π est rationnel : ABSURDE !

On en déduit que $k = 0$. Par conséquent : $n = \pm p$. Puisque n et p sont entiers naturels, on en déduit que : $n = p$.

Conclusion. La suite de terme général $\cos(n)$ "ne prend jamais deux fois la même valeur" : $(\cos(n) = \cos(p)) \Longleftrightarrow (n = p)$

Exercice 2. — Combat des chefs 1. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Pour tout entier $n \geqslant 3$ on a : $\displaystyle\frac{n!}{\mathrm{e}^n} = \prod_{k=1}^{2} \frac{k}{\mathrm{e}} \times \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}^2} \times \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}}$ $(\spadesuit)$

Or : $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=3}^{n} \frac{3}{\mathrm{e}}$. D'où : $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k}{\mathrm{e}} \geqslant \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^{n-2}$ $(\clubsuit)$ De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^{n-2} = +\infty$ $(\heartsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, $(\heartsuit)$ et la propriété de comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Exercice 3. — Combat des chefs 2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\frac{n^n}{n!} = n \times \prod_{k=2}^{n} \frac{n}{k}$. Or : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{n}{k} \geqslant 1$. Par suite : $\displaystyle\frac{n^n}{n!} \geqslant n$ $(\spadesuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et la propriété de comparaison, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 4. — De l'utilité des équivalents. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{\mathrm{e}^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}$. En déduire la limite de (u_n).

A partir d'un certain rang, on a :

$$u_n = \frac{n^2}{\mathrm{e}^n} \times \underbrace{\frac{1 - \dfrac{\arctan(n^3+1)}{n^2} - 2\dfrac{\ln(n)}{n^2}}{1 - \dfrac{n^{3/2}}{\mathrm{e}^n} + \dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} + 5\dfrac{\sin(n)}{\mathrm{e}^n} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}}}_{\varphi_n}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n^3+1)}{n^2} = 0$ ("bornée $\times$ limite 0") ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (CC) ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{\mathrm{e}^n} = 0$ (CC)

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = 0$ (CC) ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\mathrm{e}^n} = 0$ ("bornée $\times$ limite 0") ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ (usuel).

On en déduit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

Par conséquent : $u_n = \dfrac{n^2}{e^n} \times \varphi_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$. D'où :

$$u_n \sim \frac{n^2}{e^n}$$

Puisqu'en outre $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$ (CC), on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - \arctan(n^3+1) - 2\ln(n)}{e^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5\sin(n) + 1} = 0$

Exercice 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Pour tout $n \geqslant 2023$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$.

Or : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Exercice 6. — Encadrement de $\zeta(2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1/ Justifier brièvement que pour tout entier $k \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

2/ En déduire que la suite (Z_n) est majorée par 2.

3/ Etablir que la suite (Z_n) est convergente, et que sa limite ℓ appartient à $[1,2]$.

1/ Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $k^2 \geqslant k^2 - k \Longrightarrow k^2 \geqslant k(k-1) \Longrightarrow \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$.

On en déduit que pour tout entier $k \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

2/ On déduit de la question précédente que pour tout entier $n \geqslant 2$: $Z_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}_{=1-\frac{1}{n}}$

Soit : $Z_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n \leqslant 2$.

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $Z_{n+1} - Z_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$. Donc la suite (Z_n) est croissante.

La suite (Z_n) est donc croissante et majorée (par 2, d'après la question précédente). D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n \geqslant Z_1 = 1$ (puisqu'encore une fois la suite (Z_n) est croissante).

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant Z_n \leqslant 2$. Par suite : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.*

Remarque. *De fait, on a $\ell = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ (cf PBS6). Et la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $\zeta(2)$ est donc 1.645, qui est effectivement comprise entre 1 et 2, ouf !*

*. Par "stabilité des inégalités larges par passage à la limite".

Exercice 7. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$. D'où : (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} \leqslant 0$$

D'où : (v_n) est décroissante.

Conclusion. Les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, de monotonies opposées, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Remarque. *D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers le même réel. On a déjà établi cette année en cours que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{e}$. En utilisant un raisonnement astucieux à partir de ces résultats, on peut prouver que* e *est irrationnel (c'est l'objet de l'exercice 11 de la feuille d'exos sur les suites).*