Exercices 9 — Equations différentielles linéaires — Corrigé

NB : *Sauf mention explicite du contraire, dans les exercices de cette feuille, par "résoudre l'équation différentielle" on entend "déterminer toutes les solutions à valeurs réelles".*

EDL d'ordre 1.

Méthode "universelle" de résolution des EDL

1) Choix de l'intervalle de résolution (s'il n'est pas imposé dans l'énoncé).

2) Résolution de l'équation homogène (ou sans second membre) associée.

3) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète (avec second membre).

4) Solutions de l'EDL complète obtenues en "faisant la somme des deux étapes précédentes".

Remarque : un mot sur la première étape, rapidement évoquée en cours. Souvent, l'intervalle de résolution est donné dans l'énoncé (on vous demande "Résoudre sur…"). Lorsque ce n'est pas le cas, il faut déterminer quelle est la partie de $\mathbb{R}$ sur lesquelles les fonctions (les coefficients notés a, b et c dans le cours) sont définies, continues, et où a ne s'annule pas.

Exercice 1. — Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes (on précisera bien à chaque fois l'intervalle de résolution) :

1) $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}\,(t)y = \mathrm{ch}^2(t)$

2) $y' + \dfrac{y}{\tau} = E_0$ avec τ et E_0 réels non nuls

3) $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$

4) $xy' + (x-1)y = x^3$

5) $xy' + y = \arctan(x)$

6) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$

7) $\sin(x)y' - \cos(x)y - \sin^3(x) = 0$

8) $y' + 2y = \dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$

La première question corrigée ci-dessous est la d) ; la motivation pour ce choix est double. D'une part, la recherche de la solution particulière est un peu plus simple que dans la question a), et d'autre part, les illustrations (voir page suivante) y sont encore plus jolies !

d) **Résolution de l'équation différentielle** $(E_4): \; xy' + (x-1)y = x^3$

➤ Choix de **l'intervalle de résolution**. Les trois fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en 0. Comme dans l'exemple précédent, on choisira de résoudre (E_4) sur $]\,0;+\infty\,[$ ou sur $]-\infty;0\,[$. De nouveau, nous prendrons dans un premier temps $]\,0;+\infty\,[$ comme intervalle de résolution.

L'intervalle de résolution de (E_4) est donc $]\,0;+\infty\,[$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_4) $xy'+(x-1)y = 0$ l'équation homogène associée à (E_4). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\; \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x - \ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale de (H_4) est $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(x)-x}$ soit

$$\boxed{f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto Cx\mathrm{e}^{-x} \;\; (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète** (avec second membre).

On peut utiliser la **méthode de variation de la constante**, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = C(x)x\mathrm{e}^{-x}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad {f'}_P(x) = C'(x)x\mathrm{e}^{-x} + C(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}\right)$

C'est-à-dire : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad {f'}_P(x) = C'(x)x\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x}(1-x)$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x{f'}_P(x) + (x-1)\,f_P(x) = C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{C(x)\mathrm{e}^{-x}x\,(1-x) + C(x)\mathrm{e}^{-x}x\,(x-1)}_{=0}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x{f'}_P(x) + (x-1)\,f_P(x) = C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x}$

On en déduit que f_P est solution de (E_4) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\; C'(x)x^2\mathrm{e}^{-x} = x^3$, soit : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\; C'(x) = x\mathrm{e}^x$. Il reste donc à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$, *via* une intégration par parties :

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,(x-1) \text{ donc : } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\; C(x) = \mathrm{e}^x\,(x-1)$$

Une solution particulière de (E_4) est donc $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\,(x-1)$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_4) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\,(x-1) + Cx\mathrm{e}^{-x} \;\; (C \in \mathbb{R}) \text{ c'est-à-dire } \boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\left(x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}\right) \;\; (C \in \mathbb{R})}$$

Remarque : très peu de modifications sont nécessaires pour résoudre cette EDL sur $\mathbb{R}_-^*$. Il est assez facile de voir que la solution générale de (E_4) sur $\mathbb{R}_-^*$ est $\boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto x\left(x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}\right) \;\; (C \in \mathbb{R})}$

Représentation des solutions

➤ Le premier graphique ("rouge") montre quelques courbes représentatives de l'équation homogène, c'est-à-dire des fonctions $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto Cx\mathrm{e}^{-x}$ (pour plusieurs valeurs de C).

➤ Le second correspond à la courbe représentative d'une solution particulière de l'équation avec second membre, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\,(x-1)$.

➤ Sur le dernier graphique sont tracées les courbes de quelques solutions de l'équation avec second membre, c'est-à-dire quelques fonctions $g_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\,(x-1) + Cx\mathrm{e}^{-x}$.

Solution générale de l'équation homogène

+ Une solution particulière de l'équation complète

= Solution générale de l'équation complète

a) $\boxed{\textbf{Résolution de l'équation différentielle } (E_1) : \ \mathbf{ch}(t)y' + \mathbf{sh}\ (t)y = \mathbf{ch}^2(t)}$

➤ **Choix de l'intervalle de résolution.** Les trois fonctions a, b et c de l'EDL (E_1) sont continues sur $\mathbb{R}$. Comme en outre a (qui est la fonction ch) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) peut être résolue sur $\mathbb{R}$.

L'intervalle de résolution de (E_1) est donc $\mathbb{R}$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_1) $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}\ (t)y = 0$ l'équation homogène associée à (E_1). On a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \frac{b(t)}{a(t)} = \mathrm{th}(t)\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est donc } A : t \in \mathbb{R} \longmapsto \ln\left(\mathrm{ch}(t)\right).$$

D'après le cours [1], la solution générale de (H_1) est $f_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(t))}$ soit $\boxed{f_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{C}{\mathrm{ch}\,(t)} \quad (C \in \mathbb{R})}$.

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète** (avec second membre). En l'absence d'intuition géniale, on recherche une solution particulière par la **méthode de variation de la constante**, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_P(t) = \frac{C(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}$$

Alors : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'_P(t) = \dfrac{C'(t)\mathrm{ch}\,(t) - C(t)\mathrm{sh}\ (t)}{\mathrm{ch}^2\,(t)}$

Par suite : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(t)f'_P(t) + \mathrm{sh}\ (t)f_P(t) = \dfrac{C'(t)\mathrm{ch}\,(t) - C(t)\mathrm{sh}\ (t)}{\mathrm{ch}\,(t)} + \dfrac{\mathrm{sh}\ (t)\,C(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}$

D'où : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(t)f'_P(t) + \mathrm{sh}\ (t)f_P(t) = C'(t)$

On en déduit que f_P est solution de (E_1) si et seulement si : $\forall\ t \in \mathbb{R},\ C'(t) = \mathrm{ch}^2(t)$. Il reste donc à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de ch^2 :

$$\int \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int 2\mathrm{ch}\,(2t) + 2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\mathrm{sh}\ (2t) + 2t\right)$$

Par conséquent : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ C(t) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{sh}\ (2t) + 2t\right)$.

$\boxed{\text{Une solution particulière de } (E_1) \text{ est donc } f_P : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}\ (2t) + 2t}{4\mathrm{ch}(t)}}$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_1) est

$$g_c : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\mathrm{sh}\ (2t) + 2t}{4\mathrm{ch}(t)} + \frac{C}{\mathrm{ch}\,(t)} \quad (C \in \mathbb{R}) \text{ c'est-à-dire } \boxed{g_c : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\mathrm{sh}\ (2t) + 2t + C}{4\mathrm{ch}(t)} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

1. Plus précisément, d'après le théorème donnant la forme des solutions d'une EDL du premier ordre sans second membre.

b) **Résolution de l'équation différentielle (E_2) : $y' + \dfrac{y}{\tau} = E_0$ avec τ et E_0 réels non nuls**

➤ Choix de **l'intervalle de résolution.** Les trois fonctions a, b et c (constantes dans ce cas particulier) de l'EDL (E_2) sont continues sur $\mathbb{R}$. Comme en outre a (qui est constante égale à 1) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) peut être résolue sur $\mathbb{R}$.

L'intervalle de résolution de (E_2) est donc $\mathbb{R}$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_2) $y' + \dfrac{y}{\tau} = 0$ l'équation homogène associée à (E_2). On a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \frac{b(t)}{a(t)} = \tau^{-1}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est donc } A : t \in \mathbb{R} \longmapsto t/\tau.$$

D'après le cours, la solution générale de (H_2) est $\boxed{f_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto C\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad (C \in \mathbb{R})}$.

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète** (avec second membre). Les coefficients de (E_2) étant constants, on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante, c'est-à-dire en posant $f_P = K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

La fonction f_P est solution de (E_2) si et seulement si : $\dfrac{K}{\tau} = E_0$, d'où : $K = \tau\, E_0$.

Une solution particulière de (E_2) est donc $f_P : t \in \mathbb{R} \longmapsto \tau\, E_0$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_2) est

$$\boxed{g_c : t \in \mathbb{R} \longmapsto \tau\, E_0 + C\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

c) **Résolution de l'équation différentielle** (E_3) : $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$

➤ Choix de **l'intervalle de résolution**. Les fonctions a et b sont définies sur $\mathbb{R}$, et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Mais la fonction c n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. On résoudra donc l'équation (E_3) sur $]\,0;+\infty\,[$ ou sur $]-\infty;0\,[$. En général, dans ce genre de situation, l'énoncé précisera l'intervalle de résolution. Pour fixer les idées, nous choisirons ici de résoudre (E_3) sur $]\,0;+\infty\,[$.

L'intervalle de résolution de (E_3) est donc $]\,0;+\infty\,[$. [2]

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_3) $(1+x^2)y' + 2xy = 0$ l'équation homogène associée à (E_3). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{2x}{1+x^2}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln\left(1+x^2\right).$$

D'après le cours, la solution générale de (H_3) est $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln\left(1+x^2\right)}$ soit

$$\boxed{f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète** (avec second membre). On peut utiliser la **méthode de variation de la constante**, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = \dfrac{C'(x)\left(1+x^2\right) - 2xC(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(1+x^2\right) f'_P(x) + 2xf_P(x) = \dfrac{C'(x)\left(1+x^2\right) - 2xC(x)}{1+x^2} + \dfrac{2xC(x)}{1+x^2}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(1+x^2\right) f'_P(x) + 2xf_P(x) = C'(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E_3) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \dfrac{1}{x}$. Puisque l'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = \ln(x)$.

Une solution particulière de (E_3) est donc $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_3) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R}) \text{ c'est-à-dire } \boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\ln(x) + C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

Remarque : très peu de modifications sont nécessaires pour résoudre cette EDL sur $\mathbb{R}_-^*$. De fait, le seul changement dans ce qui précède vient du fait qu'une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto \ln(-x)$. On peut donc conclure, sans refaire tous les calculs, que la solution générale de (E_3) sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{\ln(-x) + C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

2. Mais, pour enfoncer le clou, rien n'empêche de choisir $]-\infty;0\,[$.

e) **Résolution de l'équation différentielle** (E_5) : $xy' + y = \arctan(x)$

➤ Choix de **l'intervalle de résolution**. Les trois fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en 0. Vous avez l'habitude à présent : on choisira de résoudre (E_5) sur $]0;+\infty[$ ou sur $]-\infty;0[$. Nous prendrons dans un premier temps $]0;+\infty[$ comme intervalle de résolution.

L'intervalle de résolution de (E_5) est donc $]0;+\infty[$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée**. Notons (H_5) $xy' + y = 0$ l'équation homogène associée à (E_5). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale de (H_5) est $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)}$ soit $\boxed{f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}$.

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète**. On utilise la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = \frac{C(x)}{x} \qquad \text{Alors : } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x f'_P(x) + f_P(x) = \dfrac{C'(x)x - C(x)}{x} + \dfrac{C(x)}{x}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x f'_P(x) + (x-1)\, f_P(x) = C'(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E_5) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \arctan(x)$. Pour déterminer C, il "suffit" de connaître une primitive de arctan. Je vous renvoie alors au chapitre précédent, dans lequel nous avons déterminé une telle primitive (par intégration par parties). On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad C(x) = x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

Une solution particulière de (E_5) est donc $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \arctan(x) - \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_5) sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \arctan(x) - \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{x} + \dfrac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})$

c'est-à-dire $\boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \arctan(x) - \dfrac{C + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}$

Remarque : de même, la solution générale de (E_5) sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\boxed{g_c : x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \arctan(x) - \frac{C + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

f) **Résolution de l'équation différentielle** $(E_6): \; x(x^2-1)y' + 2y = x^2$

➤ Choix de **l'intervalle de résolution**. Les trois fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en 0, en 1 et -1... On a donc l'embarras du choix pour l'intervalle de résolution : $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$, $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$. Nous prendrons dans un premier temps $]1;+\infty[$ comme intervalle de résolution.

$\boxed{\text{L'intervalle de résolution de } (E_6) \text{ est } I_6 = \,]1;+\infty[}$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_6) $x(x^2-1)y' + 2y = 0$ l'équation homogène associée à (E_6). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\; \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{2}{x\,(x^2-1)}$$

On détermine une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur I_6 par le biais d'une décomposition en éléments simples.

$$\exists\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\; \forall\, x \in\; I_6,\; \frac{2}{x\,(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

Par la méthode de votre choix (identification ou limites), on obtient $a=-2$, et $b=c=1$. Par conséquent :

$$\forall\, x \in\; I_6,\; \frac{2}{x\,(x^2-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur I_6 est donc $A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$.

D'après le cours, la solution générale de (H_6) est $f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)}$ soit

$$\boxed{f_C : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{Cx^2}{x^2-1} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète.** On utilise la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in\; I_6, \quad f_P(x) = \frac{C(x)x^2}{x^2-1}$$

Alors : $\forall\, x \in\; I_6, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)(x^2-1) - 2xC(x)x^2}{(x^2-1)^2}$

Soit : $\forall\, x \in\; I_6, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)(x^2-1) - 2x^3C(x)}{(x^2-1)^2}$

Soit enfin : $\forall\, x \in\; I_6, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)}{x^2-1} - \dfrac{2x^3C(x)}{(x^2-1)^2}$

Par suite :

$$\forall\, x \in\; I_6, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = x\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right) - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + 2\frac{C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\; I_6, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3 + 2x^2C(x) - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + \frac{2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\; I_6, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3 + \frac{2x^2\,(x^2-1)\,C(x)}{x^2-1} - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + \frac{2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\iff \forall\, x \in\; I_6,\quad x(x^2-1){f'}_P(x)+2f_P(x) = C'(x)x^3+\frac{2x^4C(x)-2x^2C(x)-2x^4C(x)+2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\iff \forall\, x \in\; I_6,\quad x(x^2-1){f'}_P(x)+2f_P(x) = C'(x)x^3$$

On en déduit que f_P est solution de (E_6) si et seulement si : $\forall\, x \in\; I_6,\; C'(x)x^3 = x^2$. Pour déterminer C, il "suffit" de connaître une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur I_6. On a donc :

$$\forall\, x \in\; I_6,\quad C(x) = \ln(x)$$

Une solution particulière de (E_6) est donc $f_P : x \in\; I_6 \longmapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{x^2-1}$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_6) sur I_6 est

$$g_c : x \in\; I_6 \longmapsto \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1}+\frac{Cx^2}{x^2-1}\quad (C\in\mathbb{R})\quad \text{c'est-à-dire}\quad g_c : x \in\; I_6 \longmapsto \frac{x^2\,(C+\ln(x))}{x^2-1}\quad (C\in\mathbb{R})$$

Remarque : la solution générale de (E_6) est la même sur $]\,0;1\,[$. En revanche, sur chacun des intervalles $]-\infty;-1\,[$ et $]-1;0\,[$ est $g_c : x \longmapsto \dfrac{x^2\,(C+\ln(-x))}{x^2-1}\quad (C\in\mathbb{R})$.

---

g) **Résolution de l'équation différentielle** (E_7) : $\sin(x)y' - \cos(x)y - \sin^3(x) = 0$

Contrairement aux apparences, ce n'est pas une équation homogène puisque :

$$(E_7) :\; \sin(x)y' - \cos(x)y = \sin^3(x)$$

➤ Choix de **l'intervalle de résolution**. Les trois fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en $k\pi$ (avec $k\in\mathbb{Z}$). On peut donc prendre comme intervalle de résolution tout intervalle $I_k = \,]\,k\pi;(k+1)\,\pi\,[$, et puisque l'on ne nous impose rien ici, choisissons $I_0 = \,]\,0;\pi\,[$.

L'intervalle de résolution de (E_7) est donc $I_0 = \,]\,0;\pi\,[$.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H_7) $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ l'équation homogène associée à (E_7). On a :

$$\forall\, x \in\; I_0,\; \frac{b(x)}{a(x)} = -\text{cotan}(x)\,;\quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I_0 \text{ est donc } A : x \in\; I_0 \longmapsto -\ln(\sin(x)).$$ [3]

D'après le cours, la solution générale de (H_7) est $f_C : x \in\; I_0 \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(\sin(x))}$ soit

$$f_C : x \in\; I_0 \longmapsto C\sin(x)\quad (C\in\mathbb{R}).$$

3. Il ne s'agit pas ici d'une primitive usuelle à proprement parler, puisque la fonction cotangente n'est même pas une fonction usuelle du programme (de Sup ou de Spé). Mais la fonction à intégrer $(-\cos/\sin)$ étant de la forme $-u'/u$, une de ses primitives est donc $-\ln|u|$, c'est-à-dire $-\ln u$ dans la présente situation puisque la fonction $u = \sin$ est à valeurs positives sur l'intervalle I_0.

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète**. On utilise la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in\ I_0, \quad f_P(x) = C(x)\sin(x)$$

Alors : $\forall\, x \in\ I_0, \quad {f'}_P(x) = C'(x)\sin(x) + C(x)\cos(x)$

Par suite : $\forall\, x \in\ I_0, \quad \sin(x){f'}_P(x) - \cos(x)f_P(x) = C'(x)\sin^2(x) + C(x)\cos(x)\sin(x) - C(x)\cos(x)\sin(x)$

D'où : $\forall\, x \in\ I_0, \quad \sin(x){f'}_P(x) - \cos(x)f_P(x) = C'(x)\sin^2(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E_7) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)\sin^2(x) = \sin^3(x)$.

D'où $\forall\, x \in\ I_0,\ C'(x) = \sin(x)$, et par suite : $\forall\, x \in\ I_0,\ C(x) = -\cos(x)$.

Une solution particulière de (E_7) est donc $f_P : x \in\ I_0 \longmapsto -\sin(x)\cos(x)$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E_7) sur I_0 est

$g_c : x \in\ I_0 \longmapsto -\sin(x)\cos(x) + C\sin(x) \ \ (C \in \mathbb{R})$

c'est-à-dire $\boxed{g_c : x \in\ I_0 \longmapsto (C - \cos(x))\sin(x) \ \ (C \in \mathbb{R})}$

Remarque : de même, la solution générale de (E_7) sur $I_k = \,]\,k\pi; (k+1)\,\pi\,[$ est

$\boxed{g_c : x \in\ I_k \longmapsto (C - \cos(x))\sin(x) \ \ (C \in \mathbb{R})}$.

Exercice 2. — Résoudre l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)\,y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$.

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 avec second membre.

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $(x^2+1)\,y' - xy = 0$. Les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}$, et a ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de b/a sur $\mathbb{R}$, et C un réel arbitraire. Or :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{-x}{x^2+1}\,;\quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\ln(\sqrt{1+x^2}).$$

D'après le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est $f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{1+x^2})}$ soit

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C\sqrt{1+x^2}\ \ (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation complète** (E) : on peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f_P(x) = C(x)\sqrt{1+x^2}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad {f'}_P(x) = C'(x)\sqrt{1+x^2} + C(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad (x^2+1){f'}_P(x) - xf_P(x) = C'(x)\,(x^2+1)^{3/2} + \underbrace{C(x)x\sqrt{x^2+1} - xC(x)\sqrt{x^2+1}}_{=0}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\qquad (x^2+1){f'}_P(x) - xf_P(x) = C'(x)\,(x^2+1)^{3/2}$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ C'(x)\,(x^2+1)^{3/2} = (x^2+1)^{3/2}$, soit : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ C'(x) = 1$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ C(x) = x$.

On en déduit que la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto x\sqrt{x^2+1}$ est une solution particulière de (E).

➤ **Conclusion - Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+C)\,\sqrt{x^2+1}\ \ (C \in \mathbb{R})}.$$

Exercice 3. — **(Mines d'Albi, Douai, Nantes...)**. Résoudre l'équation différentielle

(E) : $x^2y' + (2x-1)\,y = 0$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 homogène. Les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de b/a sur $\mathbb{R}_+^*$, et C un réel arbitraire. Or :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,;\quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x^2) + \frac{1}{x}.$$

D'après le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x^2)+1/x}$ soit

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{C}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}\ \ (C \in \mathbb{R})}.$$

Solution analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 4. — (Mines d'Albi, Douai, Nantes...). Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy' + y = \mathrm{ch}\,(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 avec second membre.

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** $(H) : xy' + y = 0$. Les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et a ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de b/a sur $\mathbb{R}_+^*$, et C un réel arbitraire. Or :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est $f_H : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)}$ soit

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation complète** (E) : on peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'_P(x) + f_P(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x} + \dfrac{C(x)}{x}$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xf'_P(x) + f_P(x) = C'(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \mathrm{ch}(x)$. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = \mathrm{sh}\,(x)$.

On en déduit que la fonction $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}$ est une solution particulière de (E).

➤ **Conclusion - Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

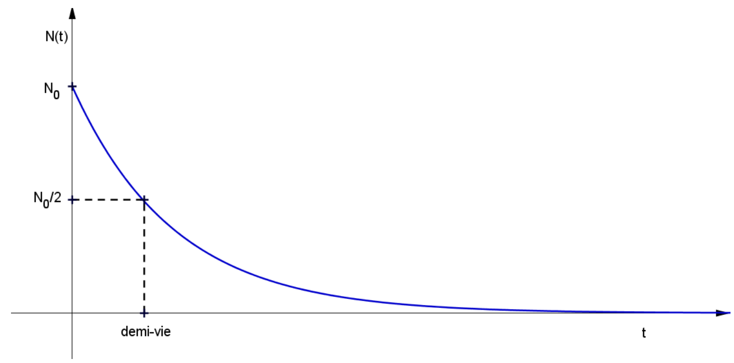
$$\boxed{f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{C + \mathrm{sh}\,(x)}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

EDL d'ordre 1 – Problèmes de Cauchy.

Exercice 5. — Désintégration radioactive. Dans un tissu radioactif, les lois de la Physique permettent d'affirmer que la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs (à l'instant t) est proportionnelle au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents dans le tissu à l'instant t.[4]

Ce phénomène, appelé désintégration radioactive, peut être modélisé par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0;+\infty\,[\;, \quad \dfrac{dN\,(t)}{dt} + \lambda N\,(t) = 0 \\ \\ N\,(0) = N_0 \end{cases}$$



où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant $t = 0$, et λ désigne une constante strictement positive.

1) Déterminer l'expression de $N(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 homogène. Sans difficulté, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+$ est :

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto C\mathrm{e}^{-\lambda t} \;\; (C \in \mathbb{R})$$

La condition initiale impose $C = N_0$.

Conclusion. L'unique solution du problème de Cauchy est : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$

2) Déterminer la période de demi-vie, c'est à dire la valeur de T telle que : $N(T) = N_0/2$.

D'après ce qui précède :

$$N(T) = N_0/2 \Longleftrightarrow N_0\mathrm{e}^{-\lambda T} = N_0/2 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda T} = 1/2 \Longleftrightarrow T = \ln(2)$$

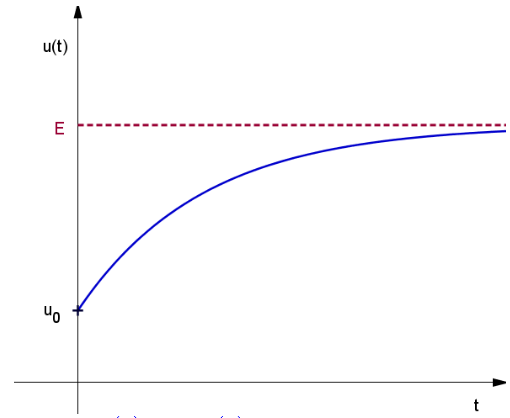
Conclusion. La période de demi-vie est $T = \ln(2)$.

4. Pour plus de précisions à ce sujet, consulter M Roveillo !

Exercice 6. — Evolution d'une tension.

On peut étudier l'évolution de la tension $u(t)$ lors de la charge d'un condensateur à travers un résistor, sous une tension E. La tension $u(t)$ est dans ce cas donnée par :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0; +\infty[\ , \quad \dfrac{du\,(t)}{dt} + \dfrac{u\,(t)}{RC} = \dfrac{E}{RC} \\ u\,(0) = u_0 \qquad (u_0 \in \mathbb{R}_+) \end{cases}$$



1) Déterminer l'expression de $u(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

On commence par résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation homogène associée : $\dfrac{du\,(t)}{dt} + \dfrac{u\,(t)}{RC} = 0$.

Il est immédiat que la solution générale de cette équation est :

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto K\mathrm{e}^{-t/RC} \ \ (K \in \mathbb{R})$$

Le second membre de l'équation complète étant constant (de même que les coefficients), on recherche une solution particulière constante. Il est aisé de voir que la fonction constante égale à E est solution.

On déduit de ce qui précède que la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto E + K\mathrm{e}^{-t/RC} \ \ (K \in \mathbb{R})$$

La condition initiale impose :

$$E + K = u_0 \Longleftrightarrow K = u_0 - E$$

Conclusion. L'unique solution de ce problème de Cauchy est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u(t) = E + (u_0 - E)\mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{soit :} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right) + u_0\mathrm{e}^{-t/RC}$$

2) Déterminer la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente : $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = E$.

Exercice 7. — Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y\,' - \dfrac{y}{x} + \ln(x) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 avec second membre.

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y' - \dfrac{y}{x} = 0$. Les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et a ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de b/a sur $\mathbb{R}_+^*$, et C un réel arbitraire. Or :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{1}{x}\,; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est donc } A : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est $f_H : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(x)}$ soit

$$\boxed{f_H : x \in \ \mathbb{R}_+^* \longmapsto Cx \ \ (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation complète** (E) : on peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_P(x) = C(x)x$$

Alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) = xC'(x) + C(x)$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_P(x) - \dfrac{f_P(x)}{x} = xC'(x) + C(x) - C(x)$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'_P(x) - \dfrac{f_P(x)}{x} = xC'(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ xC'(x) = -\ln(x) \iff \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x}$. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = -\dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

On en déduit que la fonction $f_P : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\dfrac{x\ln^2(x)}{2}$ est une solution particulière de (E).

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\left(C - \frac{\ln^2(x)}{2}\right) \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ La condition initiale $(y(1) = 1)$ impose : $C = 1$.

➤ **Conclusion**. L'unique solution de ce problème de Cauchy est :

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\left(1 - \frac{\ln^2(x)}{2}\right)$$

Exercice 8. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} xy' + y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\[2ex] y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

L'équation à résoudre est une EDL d'ordre 1 avec second membre.

➤ **Intervalle de résolution** : le second membre, la condition initiale, et le fait que a s'annule en 0 imposent de résoudre l'équation différentielle sur $I =]0, 1[$.

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $xy' + y = 0$. Les fonctions a et b étant continues sur I, et a ne s'annulant pas sur I, la solution générale de (H) sur I est $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de b/a sur I, et C un réel arbitraire. Or :

$$\forall\, x \in I,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x}; \quad \text{une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I \text{ est donc } A : x \in I \longmapsto \ln(x).$$

D'après le cours, la solution générale sur I est $f_H : x \in I \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)}$ soit

$$\boxed{f_H : x \in I \longmapsto \frac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation complète** (E) : on peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in I, \quad f_P(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Alors : $\forall\, x \in I, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$

Par suite : $\forall\, x \in I, \quad x{f'}_P(x) + f_P(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x} + \dfrac{C(x)}{x}$

D'où : $\forall\, x \in I, \qquad x{f'}_P(x) + f_P(x) = C'(x)$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in I,\ C'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. Une primitive sur I est : $\forall\, x \in I,\ C(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{2}$.

On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{2x}$ est une solution particulière de (E).

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in I \longmapsto \frac{C + \arcsin(x)}{2x} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ La condition initiale $(y(1/2) = 0)$ impose : $C = -\arcsin(1/2)$, càd : $C = -\pi/6$.

➤ **Conclusion**. L'unique solution de ce problème de Cauchy est :

$$f : x \in I \longmapsto \frac{\arcsin(x) - \frac{\pi}{6}}{2x}$$

EDL d'ordre 2.

Exercice 9. — Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

1) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-x}$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' + y' - 2y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + r - 2 = 0$

(EC) possède deux racines : 1 et -2.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**. Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (-1) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{(avec } a,\, b \text{ et } c \text{ réels).}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = (ax^2 + (b-4a)x + 2a - 2b + c)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + f'_P(x) - 2f_P(x)$
$$= \mathrm{e}^{-x}\left[ax^2 + (b-4a)x + 2a - 2b + c - ax^2 + (2a-b)x + b - c - 2ax^2 - 2bx - 2c\right]$$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + f'_P(x) - 2f_P(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[-2ax^2 - 2(a+b)x + 2a - 2c - b\right]$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x}\left[-2ax^2 - 2(a+b)x + 2a - 2c - b\right] = x^2\mathrm{e}^{-x} \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ -2ax^2 - 2(a+b)x + 2a - 2c - b = x^2$$

$$\iff \begin{cases} -2a = 1 \\ -2(a+b) = 0 \\ 2a - 2c - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \\ c = -3/4 \end{cases}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{-2x^2 + 2x - 3}{4}\,\mathrm{e}^{-x} \text{ est une solution particulière de } (E).}$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{-2x^2 + 2x - 3}{4}\,\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

2) $\dfrac{y''}{2} - y' + \dfrac{y}{2} = \text{sh}\,(x) \iff y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0$

(EC) possède une unique racine : 1.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**.

D'après le principe de superposition des solutions, on cherche séparément une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$, et une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

➢ **Solution particulière de** $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (1) est racine double de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = ax^2\mathrm{e}^x \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = \left(ax^2 + 2ax\right)\mathrm{e}^x \text{ puis : } f_P{}''(x) = \left(ax^2 + 4ax + 2a\right)\mathrm{e}^x$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 2f'_P(x) + f_P(x) = \mathrm{e}^x\left[ax^2 + 4ax + 2a - 2ax^2 - 4ax + ax^2\right] = 2a\mathrm{e}^x$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2a\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \iff a = \frac{1}{2}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2} \text{ est une solution particulière de } y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x.}$

➢ **Solution particulière de $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.**

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (-1) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = a\mathrm{e}^{-x} \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = a\mathrm{e}^{-x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 2f'_P(x) + f_P(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[a + 2a + a\right] = 4a\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 4a\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \iff a = \frac{1}{4}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{4} \text{ est une solution particulière de } y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}.}$

➢ D'après le principe de superposition, on déduit de ce qui précède que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4} \text{ est une solution particulière de } y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}\,(x).}$$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^2 + C_2x + C_1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

3) $y'' + 2y' + y = xe^x$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y\,'' + 2y\,' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + 2r + 1 = 0$

(EC) possède une racine double : (-1).

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**. Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (1) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^x \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ réels}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = (ax + a + b)\,\mathrm{e}^x \text{ puis : } f_P{}''(x) = (ax + 2a + b)\,\mathrm{e}^x$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''{}_P(x) + 2f'{}_P(x) + f_P(x) = \mathrm{e}^x\,[ax + 2a + b + 2ax + 2a + 2b + ax + b]$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''{}_P(x) + 2f'{}_P(x) + f_P(x) = \mathrm{e}^x\,[4ax + 4\,(a + b)]$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$[\forall\, x \in \mathbb{R},\ 4ax + 4(a + b) = x] \Longleftrightarrow \left[a = \frac{1}{4} \wedge b = -\frac{1}{4}\right]$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x-1}{4}\,\mathrm{e}^x \text{ est une solution particulière de } (E).}$

➤ **Solution générale de l'équation** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x-1}{4}\,\mathrm{e}^x + (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

4) $y\,'' + y\,' = 3 + 2x$

On peut résoudre cette équation comme précédemment : comme ce corrigé comporte suffisamment de résolutions d'EDL2, on présente ici une autre méthode.

Via le changement de fonction inconnue $Y = y'$, l'équation de l'énoncé devient une EDL1 : $Y' + Y = 3 + 2x$.

La solution générale s'obtient aisément : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Y(x) = 2x + 1 + C_1\mathrm{e}^{-x}$ (avec $C_1 \in \mathbb{R}$).

En revenant à la fonction initiale, on peut conclure que la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + x + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

5) $y'' + 4y' + 4y = \sin x$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y\,'' + 4y\,' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + 4r + 4 = 0$

(EC) possède une racine double : (-2).

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**. On observe que $\sin(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$, et on introduit l'équation :

$$(E') \qquad y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (i) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad (\text{avec } K \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = \mathrm{i}K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = -K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + 4f'_P(x) + 4f_P(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left[-K + 4\mathrm{i}K + 4K\right]$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + 4f'_P(x) + 4f_P(x) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left[3 + 4\mathrm{i}\right]$

On en déduit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left[3 + 4\mathrm{i}\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \Longleftrightarrow K = \frac{1}{3 + 4\mathrm{i}}$$

D'où $f_P(x) = \dfrac{1}{3+4\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est une solution particulière de (E').

Or pour tout réel x :

$$f_P(x) = \frac{1}{3+4\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \frac{3-4\mathrm{i}}{25}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)$$

D'où pour tout réel x :

$$\mathrm{Im}\left(f_P(x)\right) = \frac{1}{25}\left(3\sin(x) - 4\cos(x)\right)$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } g_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{25}\left(3\sin(x) - 4\cos(x)\right) \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

➤ **Solution générale de l'équation** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{25}\left(3\sin(x) - 4\cos(x)\right) + (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x} \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

6) $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 4r + 4 = 0$

(EC) possède une racine double : (2).

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{2x} \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**. On observe que $\cos(2x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)$, et on introduit l'équation :

$$(E') \qquad y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre $(2\mathrm{i})$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = K\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \quad \text{(avec } K \text{ réel).}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = 2\mathrm{i}K\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = -4K\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 4f'_P(x) + 4f_P(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\left(-4K - 8\mathrm{i}K + 4K\right)$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 4f'_P(x) + 4f_P(x) = K\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\left(-8\mathrm{i}\right)$

On en déduit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; -8\mathrm{i}K\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \Longleftrightarrow K = \frac{1}{-8\mathrm{i}}$$

D'où $f_P(x) = \dfrac{1}{-8\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ est une solution particulière de (E').

Or pour tout réel x :

$$f_P(x) = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \frac{1}{8}\,\mathrm{i}\left(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x)\right)$$

D'où pour tout réel x :

$$\mathrm{Re}\left(f_P(x)\right) = -\frac{1}{8}\sin(2x)$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } g_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{1}{8}\sin(2x) \text{ est une solution particulière de } (E).}$

➤ **Solution générale de l'équation** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{8}\sin(2x) + (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{2x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

7) $y'' + 4y' - 5y = 3\mathrm{e}^x$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' + 4y' - 5y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + 4r - 5 = 0$

(EC) possède deux racines : 1 et -5.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-5x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**.
Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (1) est racine double de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = ax\mathrm{e}^x \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = (ax + a)\,\mathrm{e}^x \text{ puis : } f_P{}''(x) = (ax + 2a)\,\mathrm{e}^x$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + 4f'_P(x) - 5f_P(x) = a\mathrm{e}^x\,[x + 2 + 4x + 4 - 5x] = 6a\mathrm{e}^x$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 6a\mathrm{e}^x = 3\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x\mathrm{e}^x}{2} \text{ est une solution particulière de } y'' + 4y' - 5y = 3\mathrm{e}^x.}$

➤ **Solution générale de l'équation** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x\mathrm{e}^x}{2} + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-5x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

8) (MinSup) $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x) \iff y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$

➤ Résolution de l'équation homogène associée (H) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 3r + 2 = 0$

(EC) possède deux racines : 1 et 2.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ Solution particulière de l'équation avec second membre.

D'après le principe de superposition des solutions, on cherche séparément une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$, et une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$

➢ Solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{x}$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (1) est racine simple de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = ax\mathrm{e}^{x} \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = a\,(x+1)\,\mathrm{e}^{x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = a\,(x+2)\,\mathrm{e}^{x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 3f'_P(x) + 2f_P(x) = a\mathrm{e}^{x}\,[x + 2 - 3x - 3 + 2x] = -a\mathrm{e}^{x}$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -a\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} \iff a = -\frac{1}{2}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{2} \text{ est une solution particulière de } y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}.}$

➢ Solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = \mathbf{e}^{-x}$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (-1) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = a\mathrm{e}^{-x} \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = a\mathrm{e}^{-x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 3f'_P(x) + 2f_P(x) = \mathrm{e}^{-x}\,[a + 3a + 2a] = 6a\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 6a\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \iff a = \frac{1}{12}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{12} \text{ est une solution particulière de } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

➢ D'après le principe de superposition, on déduit de ce qui précède que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{x\mathrm{e}^{x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{12} \text{ est une solution particulière de } y'' - 3y' + 2y = \mathrm{ch}(x).}$$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{x\mathrm{e}^{x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{12} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

9) (MinSup) $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{-3x}$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' + 6y' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 + 6r + 9 = 0$

(EC) possède une racine double : -3.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-3x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre**.

D'après le principe de superposition des solutions, on cherche séparément une solution particulière de $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$, et une solution particulière de $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$

➢ **Solution particulière de** $y'' + 6y' + 9y = \mathbf{e}^{3x}$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (3) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = a\mathrm{e}^{3x} \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = 3a\mathrm{e}^{3x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = 9a\mathrm{e}^{3x}$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + 6f'_P(x) + 9f_P(x) = a\mathrm{e}^{3x}\,[9 + 18 + 9] = 36a\mathrm{e}^{3x}$.

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 36a\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{36}$$

On en déduit que : $\boxed{\text{la fonction } f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{36}\,\mathrm{e}^{3x} \text{ est une solution particulière de } y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}.}$

➢ **Solution particulière de $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3x}$.**

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (-3) est racine double de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = ax^2\mathrm{e}^{-3x} \quad (\text{avec } a \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = a\mathrm{e}^{-3x}\,(2x - 3x^2) \text{ puis : } f_P{}''(x) = a\mathrm{e}^{-3x}\,(2 - 12x + 9x^2)$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) + 6f'_P(x) + 9f_P(x)$

$$= a\mathrm{e}^{-3x}\,[2 - 12x + 9x^2 + 12x - 18x^2 + 9x^2] = 2a\mathrm{e}^{-3x}.$$

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2a\mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-3x} \text{ est une solution particulière de } y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3x}.}$$

➢ D'après le principe de superposition, on déduit de ce qui précède que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{3x} + x^2\mathrm{e}^{-3x} \text{ est une solution particulière de } y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{-3x}.}$$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{3x} + x^2\mathrm{e}^{-3x} + (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-3x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

10) $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** (H) : $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0$

(EC) possède une unique racine : 1.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^x \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➣ **Solution particulière de** $y'' - 2y'y = 6x\mathbf{e}^x$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre (1) est racine double de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = (ax^3 + bx^2)\,\mathrm{e}^x \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ réels}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = \mathrm{e}^x\,(ax^3 + (b+3a)\,x^2 + 2bx) \text{ puis : } f_P{}''(x) = \mathrm{e}^x\,(ax^3 + (b+6a)\,x^2 + (4b+6a)\,x + 2b)$$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''_P(x) - 2f'_P(x) + f_P(x)$

$$= \mathrm{e}^x\,[ax^3 + (b+6a)\,x^2 + (4b+6a)\,x + 2b - 2ax^3 - 2\,(b+3a)\,x^2 - 4bx + ax^3 + bx^2] = (6ax + 2b)\mathrm{e}^x.$$

On en déduit que f_P est solution si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; (6ax + 2b)\mathrm{e}^x = 6x\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow a = 1 \wedge b = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3\mathrm{e}^x \text{ est une solution particulière de } y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x.}$$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1 + C_2 x + x^3)\,\mathrm{e}^x \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

11) $y'' + y = |x| + 1$

L'idée est ici de résoudre séparément l'EDL sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.

➤ Sur $\mathbb{R}_+$, l'équation à résoudre est : $y'' + y = x + 1$.

Sa solution générale est : $\boxed{f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x + 1 \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}$.

➤ Sur $\mathbb{R}_-$, l'équation à résoudre est : $y'' + y = -x + 1$.

Sa solution générale est : $\boxed{f : x \in \mathbb{R}_- \longmapsto (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) - x + 1 \;\; (K_1 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R})}$.

➤ La question de savoir s'il existe des solutions sur $\mathbb{R}$ est un peu plus fine.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est solution de l'EDL sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_+,\;\; f(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x + 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-,\;\; f(x) = (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) - x + 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_+,\;\; f(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x + 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-,\;\; f(x) = (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) - x + 1 \\ C_1 + 1 = K_1 + 1 \\ C_2 + 1 = K_2 - 1 \end{array}\right.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL2 $y'' + y = |x| + 1$ sont les fonctions f définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{\begin{array}{ll} (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \\ (C_1 \cos(x) + (C_2 + 2) \sin(x)) + x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

où C_1 et C_2 désignent deux réels arbitraires.

12) $y'' + y = \text{Max}\,(x, 0)$

Comme précédemment, l'idée est de résoudre séparément l'EDL sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.

➤ Sur $\mathbb{R}_+$, l'équation à résoudre est : $y'' + y = x$.

Sa solution générale est : $\boxed{f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x \;\; (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}$.

➤ Sur $\mathbb{R}_-$, l'équation à résoudre est : $y'' + y = 0$.

Sa solution générale est : $\boxed{f : x \in \mathbb{R}_- \longmapsto (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) \;\; (K_1 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R})}$.

➤ Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est solution de l'EDL sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = (C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) + x \\ \forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ f(x) = (K_1\cos(x) + K_2\sin(x)) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = (C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) + x \\ \forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ f(x) = (K_1\cos(x) + K_2\sin(x)) \\ C_1 = K_1 \\ C_2 + 1 = K_2 \end{cases}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL2 $y'' + y = \mathrm{Max}\,(x, 0)$ sont les fonctions f définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \\ (C_1\cos(x) + (C_2+1)\sin(x)) & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 désignent deux réels arbitraires.

Exercice 10. — Recherche d'une solution particulière quand le second membre est "$P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$"

Pour chacune des équations différentielles linéaires suivantes, déterminer une solution particulière.

Dans chaque question, on applique la règle du cours permettant de trouver une solution particulière lorsque le second membre est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

1) (E) $y'' + y' - 2y = 2 - 4x$

On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$.

Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x$.

2) (E) $y'' + y = x^3$

On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 - 6x$.

3) (E) $y'' + y' = 2x\mathrm{e}^x$

On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^x$ (puisque 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique).

Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^x$.

4) (E) $y'' + y' - 2y = 4x^2 \mathrm{e}^{-x}$

   On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{-x}$ (puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique).

   Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto (-2x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{e}^{-x}$

5) (E) $y'' + y' - 2y = 54x\mathrm{e}^{x}$

   On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{x}$ (puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique).

   Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto (9x^2 - 6x)\,\mathrm{e}^{x}$

6) (E) $y'' - 2y' + y = 6\,(x+1)\,\mathrm{e}^{x}$

   On recherche une solution particulière sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^3 + bx^2)\,\mathrm{e}^{x}$ (puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique).

   Après calculs, une solution particulière est : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^3 + 3x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$

EDL d'ordre 2 – Problèmes de Cauchy.

Exercice 11. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{x}\sin(x) \\[2ex] y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée** $(H) : y'' - 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 2r + 2 = 0$

(EC) possède deux racines complexes conjuguées : $1 \pm \mathrm{i}$.

D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$\boxed{f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto (C_1\cos(x) + C_2\sin(x))\,\mathrm{e}^{x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➢ **Solution particulière de** $y'' - 2y' + 2y = \mathbf{e}^{x}\sin(x)$.

On commence par observer que pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^{x}\sin(x) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$.

On introduit alors l'équation (E') : $\quad y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

Puisque le coefficient de l'exponentielle au second membre $(1+\mathrm{i})$ est racine simple de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution sous la forme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \quad (\text{avec } K \text{ réel}).$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$f_P{}'(x) = ((1+\mathrm{i})\,ax + (1+\mathrm{i})\,b + a)\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ puis :

$$f_P{}''(x) = (2\mathrm{i}ax + 2\mathrm{i}b + (1+\mathrm{i})a + (1+\mathrm{i})a)\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = (2\mathrm{i}ax + 2\mathrm{i}b + 2a + 2\mathrm{i}a)\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$$

Par suite pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f''_P(x) - 2f'_P(x) + 2f_P(x) &= \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\left(2\mathrm{i}ax + 2\mathrm{i}b + 2a + 2\mathrm{i}a - 2\left(1+\mathrm{i}\right)ax - 2b - 2\mathrm{i}b - 2a + 2ax + 2b\right)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \\ &= 2\mathrm{i}a\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \end{aligned}$$

On en déduit que f_P est solution de (E') [5] si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2\mathrm{i}a\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \Longleftrightarrow a = -\frac{\mathrm{i}}{2}$$

On en déduit que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$

Or pour tout réel x on a : $f(x) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)$.

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(f(x)) = -\dfrac{1}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\cos(x)$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\cos(x) \text{ est une solution particulière de } y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{x}\sin(x).}$$

➤ **Solution générale de l'équation complète** (E) : d'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\cos(x) + \left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right)\mathrm{e}^{x}\ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➢ **Utilisation des conditions initiales**.

Soit f une solution du problème de Cauchy de l'énoncé. Alors on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\cos(x) + \left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right)\mathrm{e}^{x}$$

D'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}\left[(x+1)\cos(x) - \sin(x)\right] + \mathrm{e}^{x}\left((C_1 + C_2)\cos(x) + (C_2 - C_1)\sin(x)\right)$$

Les conditions initiales de l'énoncé $\left(y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\right)$ se traduisent donc par le sympathique système :

$$\left\{\begin{array}{l} C_2\mathrm{e}^{\pi/2} = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} - C_1\mathrm{e}^{\pi/2} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_2 = 0 \\ \\ C_1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Conclusion. L'unique solution du problème de Cauchy de l'énoncé est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\,x\mathrm{e}^{x}\cos(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}\cos(x)}{2}\,(1-x)$$

5. Et que l'on aurait pu chercher f_P sous la forme $f_P(x) = ax\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$, c'est la fatigue.

EXERCICE 12. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{-2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -x\mathrm{e}^{-2x} + C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \ \ (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}.$$

➣ **Utilisation des conditions initiales**.

Soit f une solution du problème de Cauchy de l'énoncé. Alors on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + (C_2 - x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

D'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2C_1\mathrm{e}^{2x} + [-2\,(C_2 - x) - 1]\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Les conditions initiales de l'énoncé $(y(0) = 0, y'(0) = 1)$ se traduisent donc par le système :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ C_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Conclusion. L'unique solution du problème de Cauchy de l'énoncé est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = -x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{sh}\,(2x)$$

Exercice 13. — **Oscillateur harmonique libre.** Le but de cet exercice est de résoudre une équation différentielle modélisant ce que les Physiciens appellent un oscillateur harmonique. [6]. Tout au long de cet exercice, on considère l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$(E):\ y''(t)+2my'(t)+\omega_0^2 y(t)=0$$

dans laquelle $m \geqslant 0$, et $\omega_0>0$.

Par ailleurs, dans cet énoncé, **résoudre (E)** signifiera : déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles solutions de (E).

1) **Le cas $m=0$ (sans frottements)**. Dans cette question, on suppose donc $m=0$.

   a) Résoudre (E).

   b) *Problème de Cauchy*. Soit y_0 un réel. Déterminer la solution ψ de (E) satisfaisant les deux conditions initiales : $\psi(0)=y_0$ et $\psi'(0)=0$.

   c) Retour sur le cas général : montrer que la solution générale de (E) peut s'écrire $f_H(t)=K\cos(\omega_0 t-\varphi)$ (où K et φ désignent deux réels).

2) **Le cas $m>0$ (avec frottements)**. Dans cette question, on suppose donc $m>0$.

   a) Vérifier que le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée à (E) est : $\Delta=4\left(m^2-\omega_0^2\right)$.

   b) Résoudre (E) en distinguant les 3 cas : $\Delta<0$ (*régime pseudo-périodique*), $\Delta=0$ (*régime critique*) et $\Delta>0$ (*régime apériodique*).

3) Considérons à présent l'EDL :

$$(E):\ y''(t)+2my'(t)+\omega_0^2 y(t)=A\cos(\omega t)$$

   dans laquelle on suppose que A, m, ω et ω_0 sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer une solution particulière de E.

4) Soient R, L et C trois réels strictement positifs. Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{d^2q}{dt}+\dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{LC}\,q=0$

Corrigé. Voir pdf du cours.

Extraits de DS

Exercice 14. — **EDL 1**

1) Soit f la fonction définie en posant : $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}$.

   a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Dans la suite, nous noterons D cet ensemble.

   b) Déterminer la décomposition en éléments simples de f, c'est-à-dire déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x\in D,\ f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

6. Pour plus de précisions à ce sujet, consulter…

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} : \qquad x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

en n'oubliant pas de préciser l'intervalle de résolution (que vous êtes libre de choisir).

Corrigé.

1) a) $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}}$.

b) Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle f.

$$\exists\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, x \in\ D,\ \frac{1}{x\,(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On a pour tout x dans D : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{(a+b+c)\,x^2 + (b-c)\,x - a}{x\,(x^2-1)}$

Par identification, on en déduit le système : $\left\{\begin{array}{rcl} -a & = & 1 \\ b-c & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right.$ d'où : $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 1/2 \\ c & = & 1/2 \end{array}\right.$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall\, x \in\ D,\ \dfrac{1}{x\,(x^2-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1/2}{x-1} + \dfrac{1/2}{x+1}}$

2) Les trois fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$, mais a s'annule en 0, en 1 et -1. On a donc l'embarras du choix pour l'intervalle de résolution : $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$, $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$. Nous pouvons par exemple choisir $I = \,]1;+\infty[$ comme intervalle de résolution.

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H) $x(x^2-1)y'+2y = 0$ l'équation homogène associée à (E). On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{2}{x\,(x^2-1)}$$

On détermine une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur I par le biais de la décomposition en éléments simples du b).

$$\forall\, x \in\ I,\ \frac{2}{x\,(x^2-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur I est donc $A : x \in\ I \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$.

D'après le cours, la solution générale de (H) est $f_C : x \in\ I \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)}$ soit

$$\boxed{f_C : x \in\ I \longmapsto \frac{Cx^2}{x^2-1} \quad (C \in \mathbb{R})}.$$

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète.** On peut utiliser la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution particulière f_P sous la forme :

$$\forall\, x \in\, I, \quad f_P(x) = \frac{C(x)x^2}{x^2-1}$$

Alors : $\forall\, x \in\, I, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)(x^2-1) - 2xC(x)x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$

Soit : $\forall\, x \in\, I, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)(x^2-1) - 2x^3C(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

Soit enfin : $\forall\, x \in\, I, \quad {f'}_P(x) = \dfrac{\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right)}{x^2-1} - \dfrac{2x^3C(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

Par suite :

$$\forall\, x \in\, I, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = x\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right) - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + 2\frac{C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\, I, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3 + 2x^2C(x) - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + \frac{2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\, I, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3 + \frac{2x^2C(x)}{x^2-1} - \frac{2x^4C(x)}{x^2-1} + \frac{2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\, I, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3 + \frac{2x^4C(x) - 2x^2C(x) - 2x^4C(x) + 2C(x)x^2}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in\, I, \quad x(x^2-1){f'}_P(x) + 2f_P(x) = C'(x)x^3$$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\, x \in\, I,\ C'(x)x^3 = x^2$. Pour déterminer C, il "suffit" de connaître une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur I. On a donc :

$\forall\, x \in\, I, \quad C(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est donc } f_P : x \in\, I \longmapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{x^2-1}}$.

➤ **Conclusion.** D'après les résultats obtenus au cours des deux étapes précédentes, la solution générale de (E) sur I est

$$g_c : x \in\, I \longmapsto \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1} + \frac{Cx^2}{x^2-1} \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{c'est-à-dire} \ \boxed{g_c : x \in\, I \longmapsto \frac{x^2\left(C + \ln(x)\right)}{x^2-1} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

Remarque : la solution générale de (E) est la même sur $]\,0;1\,[$. En revanche, sur chacun des intervalles $]-\infty;-1\,[$ et $]-1;0\,[$ est $\boxed{g_c : x \longmapsto \dfrac{x^2\left(C + \ln(-x)\right)}{x^2-1} \quad (C \in \mathbb{R})}$.

Exercice 15. — **EDL 2**

Soient A, ω et y_0 trois réels strictement positifs, et α un réel strictement supérieur à 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{(E)} : \qquad y'' + \omega^2 y = A\sin(\alpha x) \\ \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Corrigé.

Pour résoudre le problème de Cauchy de l'énoncé, on commence par résoudre (E) (EDL d'ordre 2 à coefficients constants).

➤ Résolution de **l'équation homogène associée.** Notons (H) $y'' + \omega^2 y = 0$ l'équation homogène associée à (E). L'équation caractéristique associée est $X^2 + \omega^2 = 0$, et elle a donc deux racines complexes conjuguées : $\pm \mathrm{i}\omega$. On en déduit que la solution générale de (H) est

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \ \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels)}}$$

➤ Recherche d'une **solution particulière de l'équation complète.** On peut penser à déterminer une solution particulière de l'équation auxiliaire

$$\text{(E')} \quad y'' + \omega y = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$$

Mais il faut alors distinguer deux cas suivant que $\alpha = \omega$ (car alors $\mathrm{i}\alpha$ est racine de l'équation caractéristique) ou $\alpha \neq \omega$.[7]

➢ Cas $\alpha \neq \omega$. Ici, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$. On en déduit que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''_P(x) = -\alpha^2 K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$. Il s'ensuit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\left(\omega^2 - \alpha^2\right) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \iff K = \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2}$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie imaginaire, la fonction : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\sin(\alpha x)$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\sin(\alpha x) + C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \ (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

7. Remarquons quand même, pour se remonter le moral, que l'on ne peut avoir $\alpha = -\omega$, puisque ces deux réels sont supposés strictement positifs dans l'énoncé.

➢ Cas $\alpha = \omega$. Dans cette situation, on cherche une solution particulière f_P de (E') en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx e^{i\alpha x}$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'_P(x) = (1 + i\alpha\, x)\, K e^{i\alpha x}$, puis : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''_P(x) = (2i\alpha - \alpha^2\, x)\, K e^{i\alpha x}$ Il s'ensuit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K e^{i\alpha\, x}\left((2i\alpha - \alpha^2\, x) + \omega^2 x\right) = A e^{i\alpha\, x} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ K e^{i\alpha\, x}(2i\alpha) = A e^{i\alpha\, x} \iff K = -\frac{A}{2\alpha}\, i$$

Ainsi la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{A}{2\alpha}\, i x e^{i\alpha\, x}$ est solution de (E'). On en déduit que sa partie imaginaire, la fonction : $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{A}{2\alpha}\, x \cos(\alpha\, x)$ est une solution particulière de (E).

Conclusion. Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{A}{2\alpha}\, x \cos(\alpha\, x) + C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Il ne reste "plus qu'à" résoudre le problème de Cauchy dans chaque cas :

➤ Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\, \sin(\alpha\, x) + C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ imposent : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ \dfrac{A\alpha}{\omega^2 - \alpha^2} + \omega C_2 = 0 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_2 = \dfrac{A\alpha}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)} \end{cases}$

Conclusion. Dans le cas $\alpha \neq \omega$, la solution du problème de Cauchy constitué de (E) et des conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\, \sin(\alpha\, x) + y_0 \cos(\omega x) + \frac{A\alpha}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)} \sin(\omega x)$$

➤ Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{A}{2\alpha}\, x \cos(\alpha\, x) + C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ imposent : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ -\dfrac{A}{2\alpha} + \alpha C_2 = 0 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_2 = \dfrac{A}{2\alpha^2} \end{cases}$

Conclusion. Dans le cas $\alpha = \omega$, la solution du problème de Cauchy constitué de (E) et des conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ est

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{A}{2\alpha}\, x \cos(\alpha\, x) + y_0 \cos(\alpha x) + \frac{A}{2\alpha^2}\, \sin(\alpha x)$$

Exercice 16. — **(Oscillateur harmonique forcé).** Le but de cet exercice est de décrire le comportement de l'oscillateur harmonique initialement au repos, sans frottements, et "forcé" à l'aide de différents signaux. Mathématiquement, il s'agit donc de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = f(t) & \textbf{(E)} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(t_1) = 0 \end{cases} \qquad (\text{avec } \omega_0 > 0,\ t_1 > 0, \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

*La première des questions ci-dessous consiste à résoudre l'équation homogène associée à **(E)**, et les trois autres à déterminer la solution générale de **(E)** avec différents seconds membres.*

Par ailleurs, dans cet exercice, lorsque l'on demande de "déterminer la solution générale d'une équation différentielle", on entend "déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions".

1/ Déterminer la solution générale de l'EDL **(H)** : $\quad y'' + \omega_0^2 y = 0$

2/ **Signal constant**. Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la solution générale de l'EDL

$$\textbf{(E1)} : \qquad y'' + \omega_0^2 y = C$$

3/ **Signal sinusoïdal**. Soient A et ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la solution générale de l'EDL

$$\textbf{(E2)} : \qquad y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega t)$$

4/ **Signal sinusoïdal et phénomène de résonance**. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega_0 t) & \textbf{(E3)} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y\left(\dfrac{\pi}{2\omega_0}\right) = 0 \end{cases}$$

Remarque *: attention, l'EDL (E3) est très semblable à l'équation (E2), à ceci près que dans (E3), on a $\omega = \omega_0$. Ce n'est pas un petit détail !...*

Corrigé.

1/ Puisque $\omega_0^2 > 0$, l'équation caractéristique $(x^2 + \omega_0^2 = 0)$ admet deux racines complexes conjuguées : $\pm i\omega_0$. La solution générale de (H) est donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f_H(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)\ (C_1,\ C_2 \text{ réels})}$

2/ La fonction constante égale à C/ω_0^2 est clairement solution de (E1). On en déduit que la solution générale de (E1) est : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{C}{\omega_0^2} + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)\ (C_1,\ C_2 \text{ réels})}$

3/ Introduisons l'équation (E') : $y'' + \omega_0^2 y = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Si $\omega \neq \omega_0$, alors ω n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E'). Posons alors : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec $K \in \mathbb{C}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'_P(t) = \mathrm{i}\omega K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ f''_P(t) = -K\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

Il s'ensuit que : f_P est solution de (E') $\Longleftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\ -K\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + K\omega_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Longleftrightarrow K = \dfrac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Une solution de (E') est donc : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = \dfrac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

Par suite, une solution de (E2) est : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = \dfrac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$.

Conclusion. Si $\omega \neq \omega_0$, la solution générale de $y'' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t)$ est

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)\ (C_1,\ C_2 \text{ réels})$$

Le cas $\omega = \omega_0$ est traité dans la question suivante.

4/ Notons (E') : $y'' + \omega_0^2 y = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$. Puisque ω_0 est racine de l'équation caractéristique associée à (E'), on pose : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = Kt\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ avec $K \in \mathbb{C}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'_P(t) = K(1 + \mathrm{i}\omega_0 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ f''_P(t) = K(2\mathrm{i}\,\omega_0 - \omega_0^2 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

Il s'ensuit que : f_P est solution de (E') $\Longleftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\ K(2\mathrm{i}\,\omega_0 - \omega_0^2 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + K\omega_0^2 t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \Longleftrightarrow K = \dfrac{A}{2\mathrm{i}\omega_0}$.

Une solution de (E') est donc : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = \dfrac{A}{2\mathrm{i}\omega_0}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$.

Par suite, une solution de (E3) est : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = \dfrac{A}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$.

Conclusion. La solution générale de $y'' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega_0 t)$ est :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + \left(C_2 + \frac{A}{2\omega_0}t\right)\sin(\omega_0 t)\ (C_1,\ C_2 \text{ réels})$$

Déterminons à présent la solution satisfaisant les conditions initiales de l'énoncé. On a :

- $f(0) = 0$ et $f(0) = C_1$. D'où : $C_1 = 0$.
- $f\left(\dfrac{\pi}{2\omega_0}\right) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2\omega_0}\right) = C_2 + \dfrac{A\pi}{4\omega_0^2}$. D'où : $C_2 = -\dfrac{A\pi}{4\omega_0^2}$.

Conclusion. L'unique solution de $y'' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega_0 t)$ telle que $y(0) = 0$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2\omega_0}\right) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left(-\frac{A\pi}{4\omega_0^2} + \frac{A}{2\omega_0}t\right)\sin(\omega_0 t)$$

Illustration. Lorsque $\omega = \omega_0$, on fait apparaître un phénomène appelé **résonance**. Le comportement de l'oscillateur harmonique devient alors “sauvage”, dans le sens où l'amplitude de ses oscillations tend (théoriquement) vers l'infini !...