Exercices 10 — Relations binaires — Nombres réels — Corrigé

Relations binaires.

Exercice 1. — Congruences. Soit p un entier naturel $\geqslant 2$. On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ appelée **relation de congruence modulo** p et notée $\equiv$ en posant

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \equiv m\ [p] \iff n-m \text{ est multiple de } p$$

On rappelle que l'assertion "$n-m$ est multiple de p" signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n-m = kp$.

1/ Montrer que la relation de congruence modulo p est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

➤ **Réflexivité**. Soit n un entier. Alors : p divise $n-n\dots$ Donc : $n \equiv n\,[p]$.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \equiv n\,[p]$. La relation de congruence est donc réflexive.

➤ **Symétrie**. Soient n et m deux entiers. Supposons que : $n \equiv m\,[p]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n-m = kp$.

Donc : $m-n = (-k)p$. Donc : p divise $m-n$. Donc : $m \equiv n\,[p]$.

Ainsi : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{Z}^2,\ (n \equiv m\,[p]) \Longrightarrow (m \equiv n\,[p])$. La relation de congruence est donc symétrique.

➤ **Transitivité**. Soient n, m et q trois entiers. Supposons que : $n \equiv m\,[p]$ et $m \equiv q\,[p]$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $n-m = kp$ et $m-q = k'p$.

Donc : $n-q = (k+k')p$. Donc : p divise $n-q$. Donc : $n \equiv q\,[p]$.

Ainsi : $\forall\,(n,m,q) \in \mathbb{Z}^3,\ (n \equiv m\,[p] \text{ et } m \equiv q\,[p]) \Longrightarrow (n \equiv q\,[p])$. La relation de congruence est donc transitive.

Conclusion. La relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2/ Montrer que la relation de congruence modulo p est compatible avec la somme et le produit, dans le sens suivant. Pour tout quadruplet (a,b,c,d) d'entiers naturels :

$$(a \equiv c\ [p]) \wedge (b \equiv d\ [p]) \Longrightarrow (a+b \equiv c+d\ [p]) \wedge (ab \equiv cd\ [p])$$

Par hypothèse, il existe deux entiers k et k' tels que : $c = a+kp$ et $d = b+k'p$. On en déduit que : $c+d = a+b+(k+k')p$: donc $a+b \equiv c+d\ [p]$.

Par ailleurs : $cd = ab + (kb+k'a+kk'p)p$. Donc $ab \equiv cd\ [p]$.

3/ Etablir que : $\forall\ (a,c,n) \in \mathbb{N}^3,\ (a \equiv c\ [p]) \Longrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^n \equiv c^n\ [p])$

Par récurrence sur n à partir de la propriété établie sur le produit dans la question précédente.

4/ Montrer que $2^{123} + 3^{121}$ est multiple de 11.

Observons que : $2^5 = 32$. Or $32 = 3 \times 11 - 1$. Donc : $32 \equiv -1\ [11]$. Par suite : $2^{10} \equiv 1\ [11]$. Donc : $2^{120} \equiv 1\ [11]$. Donc : $2^{123} \equiv 8\ [11]$.

Observons que : $3^5 = 243$. Or $243 = 22 \times 11 + 1$. Donc : $243 \equiv 1\ [11]$. Par suite : $3^{10} \equiv 1\ [11]$. Donc : $3^{120} \equiv 1\ [11]$. Donc : $3^{121} \equiv 3\ [11]$.

D'après ce qui précède : $2^{123} + 3^{121} \equiv 0\ [11]$. **Conclusion**. 11 divise $2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 2. — $\boxed{\textsc{Ordre total sur } \mathbb{C}}$. On définit une relation binaire (notée $\prec$) sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad z\prec z\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z')\\ \text{ou}\\ \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\text{ et }\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z')\end{array}\right.$$

Etablir que la relation $\prec$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$.

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

➤ **Réflexivité**. Soit z un complexe. On observe judicieusement que : $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z)$, et $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z)$. D'où : $z\prec z$.

Ainsi : $\forall\,z\in\mathbb{C},\ z\prec z$. La relation $\prec$ est donc réflexive.

➤ **Antisymétrie**. Soient z et z' deux complexes. Supposons que : $z\prec z'$ et $z'\prec z$.

Alors $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$; en effet, si l'une des inégalités $\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z')$ ou $\mathrm{Re}(z')<\mathrm{Re}(z)$ était satisfaite, l'autre ne pourrait l'être.

On en déduit déjà que : $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$.

En continuant de traduire les deux hypothèses, on obtient : $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')\leqslant\mathrm{Im}(z)$. D'où : $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

Il s'ensuit que $z=z'$.

Ainsi : $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ (z\prec z'\quad\text{et}\quad z'\prec z)\Longrightarrow(z=z')$. La relation $\prec$ est donc antisymétrique.

➤ **Transitivité**. Soient z, z' et z'' trois complexes. Supposons que : $z\prec z'$ et $z'\prec z''$.

On distingue 4 cas :

CAS 1	**CAS 2**	**CAS 3**	**CAS 4**
$\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Re}(z')<\mathrm{Re}(z'')$	$(\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z'))$ et $\mathrm{Re}(z')<\mathrm{Re}(z'')$	$\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z')$ et $(\mathrm{Re}(z')=\mathrm{Re}(z'')$ et $\mathrm{Im}(z')\leqslant\mathrm{Im}(z''))$	$(\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z'))$ et $(\mathrm{Re}(z')=\mathrm{Re}(z'')$ et $\mathrm{Im}(z')\leqslant\mathrm{Im}(z''))$

Dans les cas 1, 2 et 3 : $\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z'')$. Donc : $z\prec z''$.
Dans le cas 4 : $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z'')$ et $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z'')$. Donc : $z\prec z''$.
Ainsi : $\forall\,(z,z',z'')\in\mathbb{C}^3,\ (z\prec z'\text{ et }z'\prec z'')\Longrightarrow(z\prec z'')$. La relation $\prec$ est donc transitive.

Conclusion intermédiaire. La relation $\prec$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

De plus, pour tout couple (z,z') de nombres complexes, il est immédiat que l'on a $z\prec z'$ ou $z'\prec z$. La relation d'ordre $\prec$ est donc totale.

Conclusion. La relation $\prec$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ peut donc être totalement ordonné !

Exercice 3. — On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout couple de réels (x, y) strictement positifs :

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

➤ **Réflexivité**. Soit x un réel strictement positif. On observe judicieusement que : $x = x^1$ (et que $1 \in \mathbb{N}\ldots$). D'où : $x\mathscr{R}z$.

Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\mathscr{R}x$. La relation $\mathscr{R}$ est donc réflexive.

➤ **Antisymétrie**. Soient x et y deux réels > 0. Supposons que : $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.

Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que : $y = x^n$ et $x = y^m$.
D'où : $x = x^{nm}$. Par suite $nm = 1$, d'où $n = 1$ et $m = 1$ (puisque n et m sont dans $\mathbb{N}$).

On en déduit que $y = x$.

Ainsi : $\forall\,(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \Longrightarrow (z = y)$. La relation $\mathscr{R}$ est donc antisymétrique.

➤ **Transitivité**. Soient x, y et z trois réels > 0. Supposons que : $x\mathscr{R}y$ et $z\mathscr{R}y$.

Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que : $y = x^n$ et $z = y^m$.

On en déduit que : $z = x^{nm}$. Donc : $x\mathscr{R}z$.

Ainsi : $\forall\,(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Longrightarrow (x\mathscr{R}z)$. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

Conclusion intermédiaire. La relation $\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.

En revanche, cette relation d'ordre n'est pas totale. En effet, pour tout entier naturel n, on a $2^n \neq \dfrac{1}{2}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \neq 2$. Il s'ensuit que l'on n'a pas $\dfrac{1}{2}\mathscr{R}2$, ni $2\mathscr{R}\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre (non totale) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Pour cette relation d'ordre $\mathscr{R}$, $\mathbb{R}_+^*$ admet un plus grand élément, qui est 1.

Exercice 4. — $\boxed{\text{Relation d'équivalence sur } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On dira que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, et on notera $(u_n) \sim (v_n)$ s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

➤ **Réflexivité**. Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient"). Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall\, (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \sim (u_n)$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

➤ **Symétrie**. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, on peut supposer que ses termes sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall\, ((u_n), (v_n)) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2,\ ((u_n) \sim (v_n)) \Longrightarrow ((v_n) \sim (u_n))$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

➤ **Transitivité**. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n)\, u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall\, ((u_n), (v_n), (w_n)) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^3,\ ((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \Longrightarrow ((u_n) \sim (w_n))$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Conclusion. La relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2/ On suppose que $(u_n) \sim (v_n)$, et que la limite de (v_n) existe. Etablir que la limite de (u_n) existe, et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Par hypothèse, il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque, par hypothèse encore, la limite de (u_n) existe, on en déduit que celle de (v_n) existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Conclusion. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la limite de (u_n) existe. Alors :

$$((u_n) \sim (v_n)) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n\right)$$

Remarques. Ce résultat sera en pratique très important pour lever des indéterminations dans les calculs de limites de suites (au second semestre).

On doit aussi observer que la réciproque de l'implication ci-dessus est fausse. Les suites de termes généraux respectifs $u_n = n$ et $v_n = n^2$ ont même limite, mais on n'a pas $(u_n) \sim (v_n)$.

3/ Déterminer un équivalent simple de u_n, puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

a/ $u_n = 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n)$ b/ $u_n = \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c/ $u_n = (n^2 - n)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$

a/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = 2n^2 \left(\underbrace{1 - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^2}}_{=\varphi_n}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2} = 0$ (gendarmes), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim 2n^2$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) = +\infty$

b/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Par suite :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\underbrace{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n}\right) \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Il est alors clair que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

c/ Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

Et : $n^2 - n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Donc :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\underbrace{\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n}\right]$$

Il est de nouveau clair que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

Conclusion. $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-n)\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$.

Exercice 5. — $\boxed{\textbf{Relation d'équivalence sur } \mathbb{R}^I}$. On note $E = \mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit a un élément quelconque de I ; soient f et g deux fonctions de E.

On dira que f et g sont **équivalentes au voisinage de** a, et on notera $f \sim_a g$ s'il existe une fonction $\varphi \in E$ telle que :

$$\forall\, x \in I, \quad g(x) = \varphi(x) f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$$

1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Copier-coller-adapter de la question 1 de l'exercice précédent.

2/ On suppose que $f \sim_a g$, et que la limite de g en a existe. Etablir que la limite de f en a existe, et que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Copier-coller-adapter de la question 2 de l'exercice précédent.

3/ **Application**. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 7x + 3\cos(x)\,; \qquad \ell_2 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - x\ln(x)}\,; \qquad \ell_3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4}$$

➤ On a : $x^2 - 7x + 3\cos(x) \sim_{+\infty} x^2$. D'où : $\ell_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 7x + 3\cos(x) = +\infty$.

➤ On a : $\sqrt{x^3 - x\ln(x)} \sim_{+\infty} x^{3/2}$. D'où : $\ell_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - x\ln(x)} = +\infty$.

➤ On a : $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} \sim_{+\infty} \dfrac{x^2}{2}$. D'où : $\ell_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} = +\infty$.

Propriété de la borne supérieure (dans $\mathbb{R}$).

NB : *Dans les exercices qui suivent, on se place dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, c'est-à-dire dans l'ensemble des réels muni de ce que l'on appelle sa relation d'ordre usuelle.*

Exercice 6. — Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles minorées ? Majorées ? Bornées ? Admettent-elles un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

1/ $A = [0; 2[$

2/ $B = \{n^2 \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$

3/ $C = \left\{\dfrac{1}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$

4/ $D = \{\arctan(n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

5/ $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$

6/ $F = \{\sin(n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

➤ A est bornée, et : $\min A = \inf A = 0$; $\sup A = 2$; mais A n'a pas de plus grand élément ("$\max A$ n'existe pas").

➤ B est minorée, non majorée : $\min B = \inf B = 0$; B n'a pas de plus grand élément, ni de borne supérieure ("$\max B$ et $\sup B$ n'existent pas").

➤ C est bornée, et : $\max C = \sup C = 1$; $\inf C = 0$; mais C n'a pas de plus petit élément ("$\min C$ n'existe pas").

➤ D est bornée, et : $\min D = \inf D = 0$; $\sup D = \dfrac{\pi}{2}$; mais D n'a pas de plus grand élément ("$\max D$ n'existe pas").

➤ Les premiers éléments de E sont : $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}\ldots$ E est bornée, et : $\min E = \inf E = -\dfrac{1}{2}$; $\sup E = \max E = 1$.

➤ F est bornée, et $\sup F = 1$, $\inf F = -1$; mais F ne possède ni plus grand, ni plus petit élément (aucun de ces résultats ne peut être *démontré* simplement).

Exercice 7. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A + B = \{a + b, \ (a, b) \in \ A \times B\}$$

Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Soit x un élément de $A + B$; il existe un couple (a, b) de $A \times B$ tel que $x = a + b$. Puisque $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$, on a : $x \leqslant \sup A + \sup B$. Ce raisonnement tenant pour un élément arbitraire de $A + B$, on en déduit que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$; d'où $\boxed{\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B \ \ (\spadesuit)}$.

➤ Soient a et b deux éléments quelconques de A et B respectivement. On a : $a = (a + b) - b$. En particulier : $a \leqslant \sup(A + B) - b$.

On en déduit que pour tout $b \in B$, $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A.

D'où : $\sup A \leqslant \sup(A+B) - b$ pour tout $b \in B$. D'où : $\forall\, b \in B,\ b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$.
Par suite $\sup(A+B) - \sup A$ est un majorant de B, donc : $\sup B \leqslant \sup(A+B) - \sup A$.
D'où $\boxed{\sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)\ \ (\clubsuit)}$

$\boxed{\textbf{Conclusion} \text{ : on déduit de } (\spadesuit) \text{ et de } (\clubsuit) \text{ que : } \sup(A+B) = \sup A + \sup B}$

Exercice 8. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

Montrer que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Puisque $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$, on a déjà $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ et $\sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)$. Par suite : $\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup(A \cup B)$.

Réciproquement, soit $x \in A \cup B$. Alors $x \leqslant \sup A$ (si $x \in A$) ou $x \leqslant \sup B$ (si $x \in B$).
Donc $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
Il s'ensuit que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, d'où : $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.

On en déduit finalement que : $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)}$.

Exercice 9. — Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall\ (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$.
Montrer que : $\sup A \leqslant \inf B$.

Puisque B est non vide, il existe un élément b_0 dans B. Il résulte de l'hypothèse que : $\forall\, a \in A,\ a \leqslant b_0$.

Donc b_0 est un majorant de A. Puisque A est une partie non vide (par hypothèse) et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure : $\sup A$ existe.

De façon analogue, B admet une borne inférieure : $\inf B$ existe.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sup A > \inf B$. Posons alors : $\varepsilon = \dfrac{\sup A - \inf B}{3}$.

Par caractérisation de la borne supérieure (et de la borne inférieure), il existe un élément a de A et un élément b de B tels que :

$$\sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A \qquad \text{et} \qquad \inf B \leqslant< b < \inf B + \varepsilon$$

Par suite :

$$b < \inf B + \varepsilon < \sup A - \varepsilon < a$$

En particulier : $b < a$. Or ceci contredit l'hypothèse : $\forall\ (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$.

Par conséquent : $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 10. — Montrer que l'ensemble E$= \{r^3\ /\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Alors : $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$ (puisque la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt[3]{t}$ est strictement croissante).

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel r tel que : $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$.

La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $x < r^3 < y$.

Ainsi, pour tout couple (x,y) de réels tels que $x < y$, il existe un élément α de E tel que : $x < \alpha < y$.

Conclusion. E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. — Plus généralement, montrer que l'ensemble E= $\{f(r) \ / \ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ dès que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et strictement monotone.

Supposons que f est bijective et strictement décroissante (par exemple). Alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement décroissante aussi.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Alors : $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$ (puisque f^{-1} est strictement décroissante).

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel r tel que : $f^{-1}(x) > r > f^{-1}(y)$.

La fonction f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $x < f(r) < y$.

Ainsi, pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$, il existe un élément α de E tel que : $x < \alpha < y$.

Conclusion. E est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Démonstration analogue en supposant que f est strictement croissante.

Plus exotique.

Exercice 12. — Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, on considère la partie $A = \{2, 3, 5\}$.

1/ Justifier que A est bornée, mais ne possède ni plus grand, ni plus petit élément.

➤ 1 divise tout élément de A ; c'est donc un minorant de A.

Tout élément de A divise 0 ; 0 est donc un majorant de A.

Ainsi, A est bornée.

➤ 2 ne divise pas 3 ; donc 2 ne minore pas A. 3 ne divise pas 5 ; donc 3 ne minore pas A. 5 ne divise pas 2 ; donc 5 ne minore pas A.

Ainsi A ne possède pas de plus petit élément.

➤ Les mêmes remarques que plus haut permettent d'affirmer que ni 2, ni 3, ni 5 n'est un majorant de A.

Ainsi A ne possède pas de plus grand élément.

2/ Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

➤ Si $\sup A$ existe, c'est le plus petit (pour la relation de divisibilité) entier divisible par 2, 3 et 5 : c'est donc le PPCM (plus petit commun multiple) des entiers 2, 3 et 5.

Ainsi : $\sup A = 30$.

➤ Si $\inf A$ existe, c'est le plus grand (pour la relation de divisibilité) entier divisant 2, 3 et 5 : dans $\mathbb{N}$, seul l'entier 1 vérifie cette propriété.

Ainsi : $\inf A = 1$.