Exercices 11 – Suites réelles et complexes

Généralités sur les suites réelles

Exercice 1. — (Limites "usuelles"). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1/ $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

2/ $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

3/ $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

4/ $u_n = \dfrac{n^4 - 3n^3 + 2n - 5}{4n^2 + n + 1}$

5/ $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n - n^2}{2\mathrm{e}^n - 3n + 1}$

6/ $u_n = \mathrm{e}^{-2n}\cos(n)$

Exercice 2. — (Retour à la définition). Montrer que la suite de terme général e^n tend vers $+\infty$.[*]

Exercice 3. — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en posant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1/ Justifier que (u_n) est une suite positive, puis montrer qu'elle décroissante.

2/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 (t-1)^{2n+3} \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa limite.

Exercice 5. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa limite.

Exercice 6. — (Suites de sommes partielles : un pas vers les séries numériques) — Déterminer la limite de la suite (S_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

3) $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

Exercice 7. — (Limites et DL1). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants, si elle existe :

1/ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

2/ $u_n = n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

3/ $(\star)$ $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 8. — On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}\arctan(x)$ où x est un réel arbitraire. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 9. — Comparer les trois limites suivantes :

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right],\qquad \lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right]\qquad \text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

---

[*]. Cet exercice, dont le but est de vous faire utiliser la définition théorique de limite, peut être décliné de multiples façons en remplaçant la fonction exponentielle par la fonction carrée, ou racine cubique, ou logarithme népérien…

Suites adjacentes

Exercice 10. — On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1) Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante, et que $(v_n)_n$ est croissante.

2) Calculer $u_n - v_n$ pour tout entier naturel n. Conclure.

Exercice 11. — **(Irrationnalité de e)**

On pose pour tout entier naturel n : $\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune, que nous noterons ℓ.

2) On admet dans cette question que $\ell = \mathrm{e}$.[†]

   a) Justifier brièvement que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n < \mathrm{e} < v_n$.

   b) Montrer que e est irrationnel.

Suites extraites

Exercice 12. — Etablir que la suite de terme général $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

Exercice 13. — Etablir que la suite de terme général $\cos(n)$ n'a pas de limite.

Exercice 14. — Etablir que la suite (complexe) de terme général i^n n'a pas de limite.

Suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires

Exercice 15. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Exercice 16. — Donner l'expression du terme général, et la limite de la suite récurrente réelle (u_n) donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 17. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

Exercice 18. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$

Exercice 19. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

†. Résultat déjà établi cette année, et donné en question de cours.

Exercice 20. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3 - 2i)\, u_{n+1} - (5 - 5i)\, u_n$$

Croissances comparées

Exercice 21. — **(And the winner is…)** Soient r un réel, et $\alpha > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r^n}{n^\alpha}$

Exercice 22. — **(And the winner is… bis)** Soit r un réel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r^n}{n!}$

Exercice 23. — **(And the winner is… ter)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

Suites récurrentes ("$u_{n+1} = f(u_n)$")

Exercice 24. — Etudier la suite (en particulier, on déterminera l'éventuelle limite) u définie en posant :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

Exercice 25. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant -2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Exercice 26. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 27. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 28. — Etudier la suite u définie en posant : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

Exercices classiques d'écrit ou d'oral

Exercice 29. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 30. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et préciser leur limite.

Exercice 31. — Montrer que : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} k!\right)}{n!} = 1$

Exercice 32. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 33. — (Développement asymptotique de la série harmonique)

On définit la suite réelle (u_n) en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Partie I — Quelques propriétés de la suite (u_n)

1/ Etablir que la suite (u_n) est croissante.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$$

3/ En raisonnant par l'absurde, en déduire que (u_n) ne peut pas admettre de limite finie.

4/ Justifier que (u_n) n'est pas majorée.

5/ Déduire des questions précédentes la limite de (u_n).

Partie II — Un développement asymptotique de (u_n)

On introduit à présent deux suites réelles (a_n) et (b_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = u_n - \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad b_n = u_n - \ln(n)$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser en cas de besoin la relation suivante, que l'on ne demande pas de démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

6/ Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Dans la suite de l'exercice, on notera γ la limite[‡] commune à (a_n) et (b_n). Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \gamma$$

7/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

8/ **Application**. Déterminer la limite suivante : $\quad \ell = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

‡. Le symbole "γ" est une lettre minuscule de l'alphabet grec (c'est un "gamma").