Colle 12 – Questions de cours

Question de cours n°1 — **Théorème (suites extraites).** Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Prouvons le lemme. On note $P(n)$ l'assertion : $\varphi(n) \geqslant n$, et on montre par récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car un entier naturel est positif ou nul...

Cette remarquable vérification faite, passons à l'hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ d'où $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie. Fin de la preuve du lemme.

➤ Retour à la preuve du théorème. Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$; et soit (v_n) une suite extraite de n ; il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n on a : $(n \geqslant n_0) \Longrightarrow (|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Or l'hypothèse faite sur φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.[1]

Il s'ensuit que : $(n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon\right)$.

En recollant tous les morceaux du raisonnement précédent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon\right).$$

Conclusion. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est convergente et a pour limite $\ell = \lim u$. En d'autres termes, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Question de cours n°2 — **Exercice** : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ admet une limite si et seulement si $\theta = 0\ [2\pi]$.

Posons $u_n = \cos(n\theta)$. Puisque $(u_n)_n$ est bornée (entre -1 et 1), elle ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Supposons que $(u_n)_n$ admette une limite finie ℓ.

➢ Considérons la suite (u_{2n}) (suite extraite des termes pairs). Puisque (u_n) converge vers ℓ, alors d'après la propriété des suites extraites, (u_{2n}) converge elle aussi vers ℓ.

En outre : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1 = 2u_n^2 - 1$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$\ell = 2\ell^2 - 1 \Longleftrightarrow 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$$

Cette équation du second degré admet 1 comme racine évidente ; on en déduit que la seconde racine est $-1/2$.[2] D'où : $\boxed{(\ell = 1) \quad \vee \quad \left(\ell = -\frac{1}{2}\right) \qquad (\spadesuit)}$.

➢ Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+1} + u_{n+3} = \cos((n+1)\theta) + \cos((n+3)\theta) = 2\cos(n+2\theta)\cos(\theta) = 2u_{n+2}\cos(\theta)$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$2\ell = 2\ell\cos(\theta) \Longleftrightarrow \ell(\cos(\theta) - 1) = 0.$$

Deux cas se présentent alors :

➢ Si $\cos(\theta) \neq 1$, on déduit de la relation ci-dessus que : $\boxed{\ell = 0 \qquad (\clubsuit)}$. Les assertions $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ étant clairement incompatibles, la suite $(u_n)_n$ n'a donc pas de limite finie.

➢ En revanche, si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire si $\theta = 0\ [2\pi]$, alors la suite $(u_n)_n$ est convergente et de limite 1 (puisqu'elle est alors constante égale à 1).

Conclusion : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ admet une limite (égale à 1) SSI $\theta = 0\ [2\pi]$.

---

1. Voir lemme énoncé un peu plus haut.
2. Puisque le produit des racines est égal à "c/a".

Question de cours n^{o}3 — **Terme général de la suite de Fibonacci.**

La *suite de Fibonacci* est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

L'équation caractéristique associée à $(u_n)_n$ est $X^2 - X - 1 = 0$. Elle a deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.[3]

Conclusion intermédiaire : $\exists\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

➢ De plus : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda\, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu & = & -\lambda \\ \lambda\left((1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})\right) & = & 2 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu & = & -\lambda \\ \sqrt{5}\,\lambda & = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu & = & -\lambda \\ \lambda & = & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu & = & -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \lambda & = & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Soit encore : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n 5}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]}$

Question de cours n^{o}4 — **Propriété (“pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$”)** : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.
u converge vers ℓ SSI $\mathrm{Re}\, u$ converge vers $\mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, u$ converge vers $\mathrm{Im}\, \ell$

Preuve. ➤ Sens direct ($\Longrightarrow$). Supposons que u converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Ceci implique : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}\ell| < \varepsilon$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}\ell| < \varepsilon$.[4]

D'où : $\boxed{\text{les suites } (\mathrm{Re}\,(u_n)) \text{ et } (\mathrm{Im}\,(u_n)) \text{ convergent (vers } \mathrm{Re}\,\ell \text{ et } \mathrm{Im}\ \ell \text{ respectivement).}}$

➤ Réciproque ($\Longleftarrow$). Supposons que $(\mathrm{Re}\,(u_n))$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))$ convergent (vers $\mathrm{Re}\,\ell$ et $\mathrm{Im}\ \ell$ respectivement).

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

- ➢ il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;
- ➢ il existe un entier naturel n_1 tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Longrightarrow |\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons : $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant |\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}\ell| + |\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}\ell| < \varepsilon$ (la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire).

On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. Donc : $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } \ell.}$

---

3. Le réel x_1 est le célèbre *nombre d'or*, souvent noté φ ; et $x_2 = -1/\varphi$ (puisque le produit $x_1 x_2$ vaut -1).
4. Puisque pour tout nombre complexe z, on a : $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$.

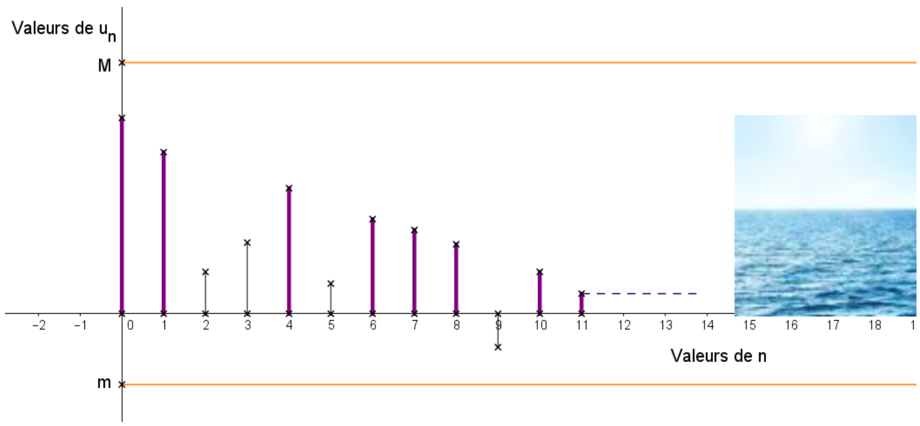
La preuve suivante est sur le principe du volontariat.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Preuve "avec vue sur la mer".
Soit u une suite réelle bornée ; il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

Introduisons une nouvelle et originale notion.

Définition 1. — Un entier naturel n a **vue sur la mer** si : $\forall p \in \mathbb{N},\ (p > n) \Longrightarrow (u_n > u_p)$.
A l'opposé, n a **la vue bouchée** si : $\exists p \in \mathbb{N},\ (p > n) \wedge (u_n \leqslant u_p)$



Deux cas se présentent alors.

➤ **Une infinité d'entiers ont vue sur la mer**.

On note alors $\varphi(0)$, $\varphi(1)$,..., $\varphi(n)$... ces entiers. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est alors (strictement) décroissante [5], et minorée (par hypothèse). Donc elle converge, et on a extrait de (u_n) une suite convergente.

➤ **Seulement un nombre fini d'entiers ont vue sur la mer**.

On note alors N_0 le rang du dernier (du plus grand [6]) entier ayant vue sur la mer.

Puis on pose $\varphi(0) = N_0 + 1$. Puisque $(N_0 + 1)$ a la vue bouchée, il existe un entier $p > N_0 + 1$ tel que $u_p \geqslant u_{N_0+1}$. Judicieusement, on pose $\varphi(1) = p$. A ce point du raisonnement, on a donc construit deux entiers naturels $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, tels que $\varphi(0) < \varphi(1)$ et $u_{\varphi(0)} \leqslant u_{\varphi(1)}$.

En itérant cette construction (ce qui est rendu possible par notre hypothèse), on construit une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ croissante et majorée (par hypothèse). Donc elle converge, et dans ce second cas, on a aussi extrait de (u_n) une suite convergente.

Conclusion : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

5. Par définition d'entier ayant vue sur la mer.
6. Qui existe, puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'admet pas de limite.

Exercice 2. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1/ Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\, u_n$

2/ Etablir que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a : $0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 3. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3-2i)\, u_{n+1} - (5-5i)\, u_n$$

Exercice 4. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

Exercice 5. — Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$\mathrm{F}_0 = 0\,; \qquad \mathrm{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$$

1/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \mathrm{F}_{n+1} > \mathrm{F}_n$$

En déduire la limite de la suite (F_n).

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'admet pas de limite.

La suite extraite (u_{3n}) converge vers 0 (puisqu'elle est constante égale à 0), et la suite extraite (u_{6n+1}) converge vers $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (puisqu'elle est constante égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

D'après la propriété fondamentale des suites extraites [7], la suite de terme général $\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

Exercice 2. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1/ Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\, u_n$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est compris entre 0 et 1/2 à partir d'un certain rang n_0.

Conclusion. Pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\, u_n$

2/ Etablir que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a : $0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

Pour tout entier $n \geqslant n_0$ posons $P(n) : 0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

La vérification de $P(n_0)$ est une formalité qui fournit l'initialisation.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant n_0$. Alors :

$$\left[0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\, u_n\right] \Longrightarrow \left[0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}\right] \Longrightarrow \left[0 < u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} u_{n_0}\right]$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [n \geqslant n_0] \Longrightarrow \left[0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}\right]$

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = 0$.

On en déduit, avec la question précédente et le théorème d'encadrement que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. La **propriété fondamentale des suites extraites** affirme que si u est une suite convergente de limite ℓ, alors toute suite extraite de u converge vers ℓ. On utilise ici la contraposée de cette implication : en exhibant deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite, on peut affirmer que la suite u n'est pas convergente.

Exercice 3. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3 - 2i)\, u_{n+1} - (5 - 5i)\, u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - (3 - 2\mathrm{i})r + (5 - 5\mathrm{i}) = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (3 - 2\mathrm{i})^2 - 4(5 - 5\mathrm{i}) = 5 - 12\mathrm{i} - 20 + 20\mathrm{i} = -15 + 8\mathrm{i}$.

Posons : $\delta = a + \mathrm{i}b$ (avec a et b réels). On a :

$$\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \\ a^2 + b^2 = 17 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ 2ab = 8 \\ b = \pm 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \delta = \pm\,(1 + 4\mathrm{i})$$

On en déduit que les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{3 - 2\mathrm{i} + 1 + 4\mathrm{i}}{2} = 2 + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{3 - 2\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}}{2} = 1 - 3\mathrm{i}$$

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \lambda\,(2 + \mathrm{i})^n + \mu\,(1 - 3\mathrm{i})^n$$

Les valeurs de u_0 et u_1 permettent d'obtenir : $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (2 + \mathrm{i})^n - (1 - 3\mathrm{i})^n$

Exercice 4. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = -4$, et les racines sont donc : $r_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/4}$.

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) 2^{n/2}$$

En outre : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$ **Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n/2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Exercice 5. — Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$\mathrm{F}_0 = 0\,; \qquad \mathrm{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$$

1/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul n, notons $P(n)$ l'assertion : $\mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

➤ **Initialisation**. Puisque $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 = 1$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel non nul n.

Selon l'énoncé : $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$, et par hypothèse de récurrence, F_{n+1} et F_n sont dans $\mathbb{N}^*$.

On en déduit que $\mathrm{F}_{n+2} \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \mathrm{F}_{n+1} > \mathrm{F}_n$$

En déduire la limite de la suite (F_n).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Selon l'énoncé : $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1}$.

Puisque $(n-1) \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente : $\mathrm{F}_{n-1} \in \mathbb{N}^*$. En particulier : $\mathrm{F}_{n-1} > 0$.

Par conséquent : $\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n > 0$.

En résumé, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n > 0$.

Ce qui signifie que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Puisque (F_n) est une suite strictement croissante d'entiers (à partir d'un certain rang), elle n'est pas majorée (pour tout réel positif M, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers naturels $\leqslant M$) : elle a donc pour limite $+\infty$.

Conclusion. La suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n = +\infty$.