

IMPORTANT !

➤ **Merci aux colleurs de commencer la colle par 1 question de cours et 1 exercice extrait de la banque d'exos.**

➤ **Pour cette colle, les exercices porteront sur "toutes" les suites, A L'EXCEPTION des suites "du type $u_{n+1} = f(u_n)$ " (vues plus tard cette année).**

Chapitre 11 : Suites réelles et complexes

1 - Généralités sur les suites réelles

2 - Limite d'une suite réelle

3 - Suites REELLES et inégalités

4 - Suites extraites

Propriété fondamentale des suites extraites (PFSE).

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

5 - Suites complexes

Définition : une suite complexe u est **bornée** si : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Définition : une suite complexe u **converge vers** $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Remarque : la définition de convergence est strictement la même que pour les suites réelles. Il suffit de lire autrement les barres verticales ("module" au lieu de "valeur absolue"). Cette remarque faite, on démontre l'énoncé ci-dessous en "copiant-collant" la preuve dans le cas réel.

Propriété : toute suite complexe convergente est bornée.

Propriété ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ ") : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.

u converge vers ℓ SSI $\text{Re } u$ converge vers $\text{Re } \ell$ et $\text{Im } u$ converge vers $\text{Im } \ell$

Application : la suite de terme général $e^{i n \theta}$ converge SSI $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.

6 - Suites particulières

6.1 - Suites arithmétiques

6.2 - Suites géométriques

6.3 - Suites arithmético-géométriques

Définition : une suite u est **arithmético-géométrique** (SAG) s'il existe deux complexes a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Pour éviter de "retomber" sur des cas triviaux ou déjà connus, on pourra raisonnablement supposer dans la suite des événements que $a \neq 0$ (auquel cas u est stationnaire, car constante au moins à partir de $n = 1$), $a \neq 1$ (u est alors arithmétique de raison b) et $b \neq 0$ (u est alors géométrique de raison a).

Théorème : avec les notations de la définition ci-dessus, avec $a \neq 1$ et $u_0 \neq \ell$.

Si $|a| < 1$, alors la suite u converge et a pour limite ℓ , en ayant posé : $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Si $|a| > 1$, la suite u diverge.

Remarque : le point-clef du théorème ci-dessus est l'énoncé suivant.

Lemme : toujours avec les mêmes hypothèses et notations. La suite $(u - \ell)$ est géométrique de raison a . Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$.

6.4 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL2)

Définition : une suite u est **récurrente linéaire d'ordre 2**, si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\star)$$

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (SRL2) est donc entièrement déterminée par les complexes a et b , et ses deux premiers termes (u_0 et u_1).

Définition : avec les notations de la définition ci-dessus, on appelle **équation caractéristique** associée à la relation (\star) l'équation $(EC) X^2 - aX - b = 0$.

Remarque-clef : soit $q \in \mathbb{C}^*$. La suite $(q^n)_n$ vérifie (\star) SSI q est racine de (EC) (ou $q = 0$).

Théorème (terme général d'une SRL2, cas COMPLEXE) : soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On note (\star) l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; E l'ensemble des suites complexes vérifiant (\star) ; (EC) l'équation $X^2 - aX - b = 0$ et Δ le discriminant de (EC) .

➤ Si $\Delta \neq 0$: (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2 , et $u \in E$ SSI :

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

➤ Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine double r_0 , et $u \in E$ SSI :

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (C_1 + nC_2) r_0^n$$

Théorème (expression du terme général d'une SRL2, cas REEL) : soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Pour le reste, mêmes notations que ci-dessus.

- Si $\Delta > 0$: (EC) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , et $u \in E$ SSI :

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

- Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine réelle double r_0 , et $u \in E$ SSI :

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (C_1 + nC_2) r_0^n$$

- Si $\Delta < 0$: (E) a deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$, et $u \in E$ SSI :

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta))$$

Application : terme général de la *suite de Fibonacci*, définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété (fondamentale des suites extraites)** : si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .
- **Exercice** : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ converge SSI $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.

- **Propriété (“pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ ”)** : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.

u converge vers ℓ SSI $\operatorname{Re} u$ converge vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} u$ converge vers $\operatorname{Im} \ell$

- **Exercice**. Terme général de la suite de Fibonacci.

- **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente. (**sur le principe du volontariat**)