

COLLE 13 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — Propriété. L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un même groupe (G, \star) .

— Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G , on a : $H_1 \subset G$ et $H_2 \subset G$.

Il s'ensuit que : $(H_1 \cap H_2) \subset G$ (SG1)

— Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G , on a : $e \in H_1$ et $e \in H_2$.

Il s'ensuit que : $e \in (H_1 \cap H_2)$ (SG2)

— Soient h et h' deux éléments de $H_1 \cap H_2$.

Alors $h \star h'$ appartient à H_1 puisque h et h' sont dans H_1 et que H_1 est un sous-groupe de G .

Et $h \star h'$ appartient à H_2 puisque h et h' sont dans H_2 et que H_2 est un sous-groupe de G .

Donc : $h \star h'$ appartient à $H_1 \cap H_2$.

En résumé : $\forall (h, h') \in (H_1 \cap H_2)^2, h \star h' \in H_1 \cap H_2$ (SG3)

— Soient h un élément de $H_1 \cap H_2$.

Alors h^{-1} appartient à H_1 et à H_2 , puisque h appartient à H_1 et H_2 , et que H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G .

Ainsi : $\forall h \in (H_1 \cap H_2), h^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$ (SG4)

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, $H_1 \cap H_2$ est une partie de G (SG1), contenant l'élément neutre (SG2), stable pour la loi \star (SG3) et par passage à l'inverse (SG4). A ce titre : $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G .¹

QUESTION DE COURS N°2 — Propriété des morphismes de groupes 1. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes, alors : $f(e_G) = e_H$

Puisque f est un morphisme de groupes, on a : $f(e_G \star e_G) = f(e_G) \# f(e_G)$ et $f(e_G \star e_G) = f(e_G)$.

Ainsi : $f(e_G) \# f(e_G) = f(e_G)$. D'où : $[f(e_G)]^{-1} \# f(e_G) \# f(e_G) = [f(e_G)]^{-1} \# f(e_G)$. D'où : $f(e_G) = e_H$.

QUESTION DE COURS N°3 — Propriété des morphismes de groupes 2. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes, alors : $\forall g \in G, f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

Sous les hypothèses de l'énoncé : $f(g^{-1} \star g) = f(g^{-1}) \# f(g)$ et $f(g^{-1} \star g) = f(e_G) = e_H$.

Ainsi : $f(g^{-1}) \# f(g) = e_H$. D'où : $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

QUESTION DE COURS N°4 — Propriété des morphismes de groupes 3. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes, alors : $\ker f$ est un sous-groupe de G .

Rappelons que : $\ker f = \{g \in G, f(g) = e_H\}$. Il résulte de cette définition que $\ker f$ est une partie de G (SG1), et de la propriété 1 que $e_G \in \ker f$ (SG2).

En outre, $\ker f$ est stable pour la loi \star (SG3), puisque :

$$\forall (g, g') \in (\ker f)^2, f(g \star g') = f(g) \# f(g') = e_H \# e_H = e_H$$

D'où : $(g, g') \in (\ker f)^2 \implies g \star g' \in \ker f$

Enfin, $\ker f$ est stable par passage à l'inverse (SG4), puisque :

$$\forall g \in \ker f, f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1} = e_H^{-1} = e_H$$

D'où : $g \in \ker f \implies g^{-1} \in \ker f$

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, $\ker f$ est une partie de G (SG1), contenant l'élément neutre (SG2), stable pour la loi \star (SG3) et par passage à l'inverse (SG4). A ce titre : $\ker f$ est un sous-groupe de G .

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi de composition interne, on peut noter simplement un groupe G , plutôt que (G, \star) .

QUESTION DE COURS N°5 — **Propriété.** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, (\mathbb{U}_n, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{U}, \times) ; et (\mathbb{U}, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

Dans les 2 cas, il suffit de vérifier les axiomes (SG1) à (SG4) (au besoin, voir chapitre 4-bis pour le détail de ces vérifications vraiment rapides).

QUESTION DE COURS N°6 — **Propriété (factorisation de $a^n - b^n$).** Soient a et b deux éléments de A , **tels que $a \times b = b \times a$** . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} b^k \times a^{n-1-k}$$

Soient a et b deux éléments de A , **tels que $a \times b = b \times a$** , et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} &= \left(a \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} \right) - \left(b \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a \times a^k \times b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} b \times a^k \times b^{n-1-k} \end{aligned}$$

Puisque : $a \times b = b \times a$, on peut écrire : $b \times a^k \times b^{n-1-k} = a^k \times b \times b^{n-1-k} = a^k \times b^{n-k}$. D'où :

$$(a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \times b^{n-1-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} \right) = \left(\sum_{k=1}^n a^k \times b^{n-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-k} \right) = a^n - b^n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.

La preuve de la seconde formule $(a^n - b^n) = (a - b) \times$

$\sum_{k=0}^{n-1} b^k \times a^{n-1-k}$ repose sur le fait que a et b jouent des rôles symétriques dans la somme écrite entre parenthèses².

QUESTION DE COURS N°7 — **Propriété.** $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe non abélien.

Rappelons que $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est l'ensemble des similitudes directes, c'est à dire l'ensemble des transformations du plan complexe ayant pour écriture $z \rightarrow az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$); dans cette preuve, nous noterons $f_{a,b}$ cette similitude.

► Loi de composition interne : la composition usuelle des applications est une lci sur $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$. En effet, si $f_{a,b}$ et $f_{a',b'}$ sont deux similitudes directes, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z) = f_{a',b'}(az + b) = a'(az + b) + b' = a'a z + a'b + b' \text{ d'où : } f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{a'a, a'b+b'}$$

La composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe, ce qui assure que la composition usuelle est une lci sur $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$.

► En outre, cette loi est associative, puisque la composition usuelle des applications l'est.

► Élément neutre : l'identité de \mathbb{C} est l'élément neutre pour la composition puisque pour toute $f \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$ on a : $f \circ \text{id}_{\mathbb{C}} = \text{id}_{\mathbb{C}} \circ f = f$. De plus : $\text{id}_{\mathbb{C}} = f_{1,0}$, d'où : $\text{id}_{\mathbb{C}} \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$.

► Tout élément de $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est inversible : si $f_{a,b}$ est une similitude directe, alors $f_{a,b}$ admet une bijection réciproque qui est encore une similitude directe. Explicitement : $f_{a,b}^{-1} = f_{1/a, -b/a}$.

L'ensemble $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est muni d'une loi de composition interne associative (la composition usuelle des applications), pour laquelle il existe un élément neutre ($\text{id}_{\mathbb{C}}$), et où tout élément est inversible. Ainsi, $(\text{Sim}^+(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe.

En outre : $f_{1,1} \circ f_{2,1} = f_{2,2}$ tandis que $f_{2,1} \circ f_{1,1} = f_{2,3}$. Il s'ensuit que le groupe $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ est non abélien.

2. Rigoureusement, on peut aussi l'établir en effectuant dans la somme le changement d'indice $K = n - 1 - k$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Etablir que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE 2. — **Propriété.** La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

EXERCICE 3. — **Une limite de référence.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

EXERCICE 4. — **Exercice classique.** Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$

EXERCICE 5. — Calculer la dérivée n -ième de f , définie sur \mathbb{R} en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)e^{ax+b}$

EXERCICE 6. — **Application du binôme de Newton.** $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

EXERCICE 7. — **(CCINP-MP 2022).** On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

- 1/ Justifier que H est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- 2/ Donner une expression de $H'(x)$.
- 3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H .

EXERCICE 8. — **(E3A-MP 2022).** Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2/ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$

EXERCICE 9. — **(E3A-PC 2022, intégrales de Wallis).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$

- 1/ Montrer que (u_n) est décroissante ; puis qu'elle est convergente.
- 2/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

EXERCICE 10. — **(ATS 2022).** Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

EXERCICE 11. — **(Centrale-TSI 2021).**

Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

EXERCICE 12. — **(E3A-MP 2020).** Calculer $\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Etablir que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Posons : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1 [$, et : $\forall x \in [-1, 1], f'(x) = 0$. Il s'ensuit que f est constante sur $] -1, 1 [$, égale (par exemple) à $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall x \in] -1, 1 [, \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Les calculs aisés de $f(1)$ et $f(-1)$ permettent de “fermer les crochets”.

Finalement, on peut conclure : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2. — **Propriété.** La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

► **Supposons f et g injectives.** Soient x et x' deux éléments de E . Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \iff [g(f(x)) = g(f(x'))] \underset{g \text{ injective}}{\implies} [f(x) = f(x')] \underset{f \text{ injective}}{\implies} [x = x']$$

Ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. **Conclusion :** si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

► **Supposons à présent f et g surjectives.** Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists y \in F, g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists x \in E, f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on a : $g(f(x)) = z$.

Puisque z est un élément arbitraire de G , on vient d'établir que : $\forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z$.

Ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$. **Conclusion :** si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

EXERCICE 3. — **Une limite de référence.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Pour tout $n \geq 2024$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

EXERCICE 4. — **Exercice classique.** Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta})$.

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \iff \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right)$$

Il “ne reste plus qu'à” calculer la somme entre parenthèses. En effet, en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}, \text{ on a donc : } \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$$

S_n est une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien, sous réserve que $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

On suppose donc $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Alors :

$$S_n = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \iff S_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \iff S_n = \frac{e^{i(\frac{n+1}{2})\theta} (e^{-i(\frac{n+1}{2})\theta} - e^{i(\frac{n+1}{2})\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \quad (\text{technique de "l'angle-moitié"})$$

$$\iff S_n = e^{i(\frac{n\theta}{2})} \frac{-2i \sin(\frac{n+1}{2} \theta)}{-2i \sin(\frac{\theta}{2})} \text{ d'où finalement : } S_n = e^{i(\frac{n\theta}{2})} \frac{\sin(\frac{n+1}{2} \theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \quad (\heartsuit)$$

On déduit de (\spadesuit) , (\clubsuit) et (\heartsuit) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0 \pmod{2\pi}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Dans le cas où $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, on a $\cos \theta = 1$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta = 0 \pmod{2\pi}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = n + 1$$

EXERCICE 5. — Calculer la dérivée n -ième de f , définie sur \mathbb{R} en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)e^{ax+b}$

Selon les TG, les fonctions $g : x \mapsto 2x - 1$ et $h : x \mapsto e^{ax+b}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Il s'ensuit que $f = gh$ est de classe \mathcal{C}^∞ , et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

En observant que $g^{(k)}$ est nulle dès que $k \geq 2$, on peut écrire : $f^{(n)} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$

D'où, pour tout réel x et pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} (2x - 1) a^n e^{ax+b} + \binom{n}{1} 2 a^{n-1} e^{ax+b} = (2x - 1) a^n e^{ax+b} + 2n a^{n-1} e^{ax+b} = [a(2x - 1) + 2n] a^{n-1} e^{ax+b}$$

EXERCICE 6. — **Application du binôme de Newton.** $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Soit n un entier naturel ≥ 2 . On définit sur \mathbb{R} une fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 + x)^n$ (\spadesuit) .

D'après la formule du binôme de Newton : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ (\heartsuit) .

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules (\spadesuit) et (\heartsuit) , on obtient : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

► La fonction f est dérivable (TG) sur \mathbb{R} , et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules (\spadesuit) et (\heartsuit) .

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ (\diamond) Et d'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ (\clubsuit)

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules (\diamond) et (\clubsuit) , on obtient : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

EXERCICE 7. — (CCINP-MP 2022). On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

1/ Démontrer que H est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Par construction, la fonction H est la primitive s'annulant en 0 de la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t^2}$.

Puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (et que $H' = f$), on en déduit que : $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2/ Donner une expression de $H'(x)$.

Par construction : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = e^{x^2}$

3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H .

D'après ce qui précède, H est dérivable en 0, donc admet un DL à l'ordre 1 en 0, donné par la célèbre formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = H(0) + xH'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Or $H(0) = 0$ et $H'(0) = 1$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

EXERCICE 8. — (E3A-MP 2022). Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$.

2/ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$

On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$ (puisque $\omega^n = 1$).

Par ailleurs :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) \\ = \exp(i\pi(n-1)) = (-1)^{n-1}.$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}$

EXERCICE 9. — (E3A-PC 2022, intégrales de Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$

1/ Montrer que (u_n) est décroissante ; puis qu'elle est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)}_{\leq 0} dt$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$. D'où : (u_n) est décroissante.

Par ailleurs, la suite (u_n) est positive (par positivité de l'intégrale). La suite (u_n) est donc décroissante et minorée (par 0) : d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

2/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases} \quad \text{d'où : } \forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$) :

$$u_{n+2} = \underbrace{[\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt$$

D'où : $u_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt$

C'est-à-dire : $u_{n+2} = (n+1) u_n - (n+1) u_{n+2}$ d'où : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

EXERCICE 10. — (ATS 2022). Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons : $a(x) = 1$, $b(x) = \frac{1}{x}$ et $c(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Selon les TG, les fonctions a , b et c sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* (en particulier continues sur \mathbb{R}_+^*).

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation homogène associée à celle de l'énoncé est :

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_H(x) = K e^{-A(x)} \quad \text{avec } A \text{ une primitive sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } b/a; \quad A = \ln \text{ convient.}$$

Ainsi, la solution générale de $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$ est :

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_H(x) = \frac{K}{x} \quad (\text{avec } K \in \mathbb{R}) \quad (\spadesuit)$$

Posons pour tout réel x strictement positif : $f_P(x) = \frac{K(x)}{x}$ avec $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

La fonction f_P est dérivable (H+TG) sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout réel $x > 0$ on a : $f'_P(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$.

On en déduit que f_P est solution de l'EDL1 de l'énoncé si et seulement si :

$$\forall x > 0, \quad \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} \iff \forall x > 0, \quad \frac{K'(x)}{x} = \frac{1}{x(x^2+1)} \iff \forall x > 0, \quad K'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

On peut donc choisir $K = \arctan$, et affirmer que la fonction f_P définie en posant $\forall x > 0, \quad f_P(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$, est une solution (particulière) de l'EDL1 de l'énoncé (

Conclusion. D'après (), () et le cours, la solution générale sur \mathbb{R}_+^* de $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$ est :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\arctan(x) + K}{x} \quad (\text{avec } K \text{ réel arbitraire})$$

EXERCICE 11. — (Centrale-TSI 2021).

Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k < n$. On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Conclusion. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Remarque. Cette relation est la relation de Pascal, déjà vue cette année. On peut vérifier aisément qu'elle reste vraie sans condition sur les entiers n et k : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

EXERCICE 12. — (E3A-MP 2020). Calculer $\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$

La fonction ch est continue et ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Il s'ensuit que la fonction $1/\operatorname{ch}$ est continue sur \mathbb{R} ; d'après le théorème fondamental de l'Analyse, elle admet donc des primitives sur \mathbb{R} .

Soit x un nombre réel. On a :

$$\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt \stackrel{u=e^t}{=} \int_1^{e^x} \frac{2}{u + u^{-1}} \times \frac{1}{u} du = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2 + 1} du = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - 2\arctan(1)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

En d'autres termes, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ est la primitive sur \mathbb{R} s'annulant en 0 de la fonction $\frac{1}{\operatorname{ch}}$.