EXERCICES 12 – GROUPES, ANNEAUX, CORPS

GROUPES

EXERCICE 1. — Montrer que $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ est un groupe. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathbb{R}_-^*$?

EXERCICE 2. — Montrer que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +\right)$ est un groupe. A-t-on toujours un groupe si on remplace la loi "+" par la loi "$\circ$" (composition) ?

EXERCICE 3. — On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel). Vérifier que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un groupe abélien. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré exactement n est-il un groupe ?

EXERCICE 4. — On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{\dfrac{n}{10^k}\ ,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que $(\mathbb{D}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

EXERCICE 5. — Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

EXERCICE 6. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

EXERCICE 7. — Soit E un ensemble non-vide. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est-il un groupe muni de la lci $\cup$? De la lci $\cap$?

EXERCICE 8. — Décrire tous les groupes possédant 1, 2, 3 ou 4 éléments. Déduire de ces descriptions que tout groupe fini de cardinal inférieur ou égal à 4 est abélien.

EXERCICE 9. — **(Groupe des permutations de $\mathbb{C}$).** On appelle **permutation de** $\mathbb{C}$ une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{Bij}(\mathbb{C})$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{C}$.

Montrer que $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.

EXERCICE 10. — **(Groupe des translations dans le plan complexe).** On appelle **translation dans le plan complexe** une application T_b définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ T_b(z) = z + b \qquad (\text{avec } b \in \mathbb{C})$$

On note $\mathrm{Tr}(\mathbb{C})$ l'ensemble des translations dans le plan complexe.

Montrer que $(\mathrm{Tr}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$. Est-il abélien ?

EXERCICE 11. — **(Groupe des rotations dans le plan complexe).** On appelle **rotation dans le plan complexe** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ une application $R_{\omega,\theta}$ définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ R_{\omega,\theta}(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z - \omega) + \omega \qquad (\text{avec } \Omega \in \mathbb{R} \text{ et } \omega \in \mathbb{C})$$

On note $\mathrm{Rot}(\mathbb{C})$ l'ensemble des rotations dans le plan complexe.

1/ Montrer que $(\mathrm{Rot}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$. Est-il abélien ?

2/ On note $\mathrm{Rot}_0(\mathbb{C})$ l'ensemble des rotations de centre O. Montrer que $(\mathrm{Rot}_0(\mathbb{C}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Rot}(\mathbb{C}), \circ)$, et qu'il est abélien.

EXERCICE 12. — **(Groupe des homothéties dans le plan complexe).** On appelle **homothétie dans le plan complexe** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k une application $H_{\omega,k}$ définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ H_{\omega,k}(z) = k(z - \omega) + \omega \qquad (\text{avec } k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \omega \in \mathbb{C})$$

On note $\mathrm{Hom}(\mathbb{C})$ l'ensemble des homothéties dans le plan complexe.

1/ Montrer que $(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}), \circ)$ est un groupe, en prouvant que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$. Est-il abélien ?

2/ On note $\mathrm{Hom}_0(\mathbb{C})$ l'ensemble des homothéties de centre O. Montrer que $(\mathrm{Hom}_0(\mathbb{C}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}), \circ)$, et qu'il est abélien.

Exercice 13. — (Groupe des similitudes directes). On rappelle que $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1/ Justifier brièvement que la composition usuelle (notée "$\circ$") est une loi de composition interne sur $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$, associative, et possédant un élément neutre.

2/ $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{C}}, \circ\right)$ est-il un groupe ?

3/ Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, et pour tout $b \in \mathbb{C}$ on définit l'application $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $f_{a,b}(z) = az + b$.

a/ Calculer : $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$.

b/ Montrer que $(\{f_{a,b};\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}, \circ)$ est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

Exercice 14. — Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par :

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

1/ Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition $\circ$ est un groupe abélien.

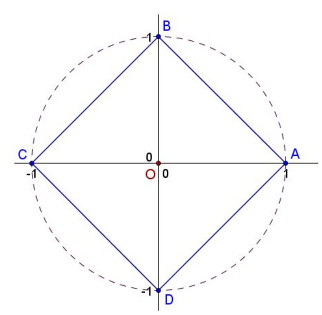
2/ Déterminer l'ensemble de ses sous-groupes.

Exercice 15. — (Centre d'un groupe). Soit G un groupe. On appelle **centre de G** et on note $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, soit : $Z(G) = \{a \in G\ ,\ \forall\, g \in G,\ ag = ga\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G. Que devient $Z(G)$ lorsque G est abélien ?

Exercice 16. — (Groupe diédral D_3). Décrire le groupe diédral $(D_3, \circ)$, c'est à dire le groupe des isométries du plan laissant invariant un triangle équilatéral de centre O.

Exercice 17. — (Groupe diédral D_4). La figure ci-dessous représente le carré $ABCD$, inscrit dans le cercle unité, les points A, B, C et D étant les images des racines quatrièmes de l'unité.

On dit qu'une transformation du plan **laisse le carré** $ABCD$ **invariant** si l'image du carré $ABCD$ par cette transformation est le carré $ABCD$ lui-même.



1/ Enumérez les huit isométries laissant le carré $ABCD$ invariant. On note D_4 l'ensemble de ces isométries.

2/ Montrez que $(D_4, \circ)$ est un groupe, non-abélien (*le groupe D_4 est un exemple de ce que l'on appelle groupe* ***diédral***).

Exercice 18. — (Groupe symétrique S_3). On appelle **groupe symétrique** S_3 le groupe des permutations de $[\![1, 3]\!]$, càd le groupe des bijections de $[\![1, 3]\!]$ dans lui-même.

1/ Justifier que $(S_3, \circ)$ est effectivement un groupe.

2/ Décrire en extension S_3. **3**/ Décrire tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 19. — (Intersection et union de sous-groupes). Soit $(G, \star)$ un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de G.

1/ Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.

2/ Montrer que : $[H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de $G] \Longleftrightarrow [H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1]$

Exercice 20. — (Groupe additif des polynômes). Il est connu que $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe. Parmi les H_i proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de $\mathbb{K}[X]$?

1/ H_1 l'ensemble des polynômes qui s'annulent en 1

2/ H_2 l'ensemble des pôlynômes de degré exactement 3

3/ H_3 l'ensemble des pôlynômes à coefficients entiers

4/ H_4 l'ensemble des pôlynômes représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 21. — (Groupe additif des fonctions continues sur $\mathbb{R}$). Il est connu que $\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +\right)$ est un groupe. Parmi les H_i proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1/ H_1 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 1

2/ H_2 l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$

3/ H_3 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui sont bornées

4/ H_4 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui réalisent une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 22. — (Groupe additif des suites réelles). Il est connu que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +\right)$ est un groupe. Parmi les H_i proposés ci-dessous, lesquels sont des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1/ H_1 l'ensemble des suites de limite 1

2/ H_2 l'ensemble des suites arithmétiques

3/ H_3 l'ensemble des suites géométriques

4/ H_4 l'ensemble des suites croissantes

5/ H_5 l'ensemble des suites stationnaires

6/ H_6 l'ensemble des suites périodiques

Morphismes de groupes

Exercice 23. — (Généralités sur les morphismes de groupes). Soient $(G, *)$ et $(H, \sharp)$ deux groupes. On appelle **morphisme de groupes** une application $f : G \longrightarrow H$ telle que

$$\forall\ (g, g') \in\ G^2, \quad f\,(g *\ g') = f\,(g)\,\sharp f\,(g')$$

Soit f un morphisme de groupes.

1/ Montrer que $f\,(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$

2/ Montrer que $f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

3/ On définit le **noyau de** f, et on note $\ker\ f$ la partie de G constituée des antécédents de e_H par f.* Explicitement :

$$\ker\ f = \{g \in\ G\,/\ f\,(g) = \mathrm{e}_H\}$$

a/ Montrer que $\ker\ f$ est un sous-groupe de G.

b/ Montrer que le morphisme f est injectif SSI $\ker\ f = \{\mathrm{e}_G\}$

4/ On définit l'**image de** f, et on note $\mathrm{im}\ f$ l'image directe de G par f. En d'autres termes :

$$\mathrm{im}\ f = f\,(G) = \{h \in\ H\ ,\ \exists\, g \in\ G,\ f\,(g) = h\}$$

a/ Montrer que $\mathrm{im}\ f$ est un sous-groupe de H.

b/ Justifier que f est surjective SSI $\mathrm{im}\ f = H$.

Exercice 24. — (Groupe des automorphismes). Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle **automorphisme** du groupe G un isomorphisme de groupes de G dans G. On note $\mathbf{Aut}\,(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

Montrer que $(\mathbf{Aut}\,(G)\,, \circ)$ est un groupe.

---

*. La notation *ker* vient de *kernel* (noyau en anglais) et/ou de *kern* (noyau en allemand).

Exercice 25. — Montrer que l'application $\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}_+^*,\times\right) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{2x} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 26. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On considère l'application : $\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{C}^*,\times) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$

1/ Montrer que f est un morphisme de groupes.

2/ Déterminer le noyau de f. Le morphisme f est-il injectif ?

3/ Justifier que le morphisme f est surjectif.

Exercice 27. — On considère l'application : $\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{U}_8,\times) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_4,\times) \\ & z & \longmapsto & z^2 \end{array}$

1/ Montrer que l'application f est bien définie, càd justifier que : $f\left(\mathbb{U}_8\right) \subset \mathbb{U}_4$.

2/ Montrer que f est un morphisme de groupes, et qu'il est surjectif.

3/ Déterminer le noyau de f. Est-il injectif ?

Exercice 28. — On considère l'application† : $\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{R}_2[X],+) & \longrightarrow & (\mathbb{R},+) \\ & P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

1/ Montrer que f est un morphisme de groupes.

2/ Déterminer le noyau de f. Le morphisme f est-il injectif ?

3/ Justifier que le morphisme f est surjectif.

Exercice 29. — On considère l'application : $\begin{array}{rccl} f : & \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^2,+\right) \\ & (u_n)_n & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array}$

1/ Montrer que f est un morphisme de groupes.

2/ Justifier que le morphisme f est surjectif, et non-injectif.

Exercice 30. — Lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **déterminant** de A et on note $\det(A)$ (ou $|A|$) le réel :

$$\det(A) = ad - bc$$

Par ailleurs, on note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1/ Etablir que l'application $\begin{array}{rccl} \det : & (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}\times) \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est un morphisme de groupes.

2/ Quel est le noyau du morphisme det ?

3/ Justifier que le morphisme det est surjectif.

†. On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. Explicitement, tout élément de $\mathbb{R}_2[X]$ peut s'écrire $aX^2 + bX + c$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 31. — On considère l'application : $\begin{array}{rccc}\Delta : & \left(\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\right) & \longrightarrow & \left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\right) \\ & f & \longmapsto & f'\end{array}$

1/ Justifier que Δ est un morphisme de groupes, et qu'il est surjectif.

2/ Déterminer le noyau de Δ. Est-il injectif ?

Exercice 32. — Montrer que $(\mathrm{Tr}(\mathbb{C}),\circ)$ et $(\mathbb{C},+)$ sont isomorphes.

Exercice 33. — Montrer que $(D_3,\circ)$ et $(S_3,\circ)$ sont isomorphes.

Exercice 34. — Montrer que $(D_4,\circ)$ et $(S_4,\circ)$ ne sont pas isomorphes.

Anneaux, corps

Exercice 35. — On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif. Est-ce encore vrai si l'on remplace $\mathbb{K}[X]$ par $\mathbb{K}_n[X]$?

Exercice 36. — On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D}=\left\{\dfrac{n}{10^k}\ |n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\right\}$. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

Exercice 37. — Montrer que $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

Exercice 38. — **(Anneau des entiers de Gauss).** On pose $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\,,\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

Exercice 39. — On pose $\mathbb{Q}[i]=\{a+ib\,,\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[i],+,\times)$ est un corps.

Exercice 40. — On note $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ l'ensemble des nombres réels pouvant s'écrire $a+b\sqrt{2}$ (avec $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$). Montrer que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R},+,\times)$.

Exercice 41. — **(Eléments nilpotents dans un anneau).** Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

Un élément a de A est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel n non nul tel que $a^n=0_A$.

1/ Soit $a\in A$. On suppose que a est nilpotent. Montrer que a n'est pas inversible.

2/ Soient a et b deux éléments nilpotents de A. **On suppose que** $ab=ba$.

- **a**/ Montrer que ab est nilpotent.
- **b**/ Montrer que $a+b$ est nilpotent.

3/ Soit $a\in A$. On suppose que a est nilpotent. Montrer que 1_A-a est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 42. — Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les applications :

$$\begin{array}{rccc}\Delta : & (\mathbb{R}_n[X],+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_n[X],+) \\ & P & \longmapsto & P'\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc}\varphi : & (\mathbb{R}_n[X],+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_n[X],+) \\ & P & \longmapsto & P-P'\end{array}$$

1/ Justifier brièvement que Δ et φ sont des morphismes de groupes.

2/ Etablir que $\Delta^{n+1}=0$.

3/ Montrer que φ est un isomorphisme de groupes, et déterminer explicitement φ^{-1}.

Exercice 43. — **(Anneau des entiers de Gauss)**. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Il a déjà été établi au cours des exercices précédents que le premier est un anneau commutatif, et le second un corps.

On définit l'application $N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}$ par : $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z\bar{z}$.

1/ Montrer que pour tout $(z,z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$.

2/ En déduire que : z est inversible dans $\mathbb{Z}[i] \Longleftrightarrow N(z) = 1$

3/ Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Vérifier qu'il s'agit d'un groupe bien connu.

Exercice 44. — Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Montrer que $F = \mathbb{Q}$.

Exercice 45. — **(Un théorème de Lagrange sur les groupes finis)**. *Ce problème pour objectif la preuve d'un théorème dû à Lagrange (1736-1813) concernant les groupes finis, qui permet de démontrer en particulier que tout groupe de cardinal 5 est abélien.*

Notations et rappels. Soit $(G, *)$ un groupe. Pour tout élément g de G, on note $g^2 = g*g$; $g^3 = g*g*g$ et plus généralement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $g^n = \underbrace{g*g*\cdots*g}_{n \text{ termes}}$.

Cette définition est étendue à un exposant dans $\mathbb{Z}$, en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$: $g^n = \left(g^{-1}\right)^{-n}$.

On note par ailleurs : $\langle g \rangle = \left\{g^k \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

➤ **Partie A - Ordre d'un élément dans un groupe**.

Soient $(G, *)$ un groupe, d'élément neutre e, et g un élément de G.

1/ Montrer que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe de G *(qui sera appelé le* ***sous-groupe engendré par*** *g).*

2/ **Deux exemples**.

a/ Dans $(S_3, \circ)$, quel est le sous groupe engendré par le 3-cycle (132) ?

b/ Dans $(\mathbb{Z}, +)$, quel est le sous-groupe engendré par 2 ?

3/ On revient au cas général. On dit qu'un élément g de G est **d'ordre fini** s'il existe un entier naturel N non nul tel que $g^N = \mathrm{e}$. Dans ce cas, on appelle **ordre de** g le plus petit N non nul tel que $g^N = \mathrm{e}$.

a/ Exemple 1 : dans $(S_3, \circ)$, quel est l'ordre du 3-cycle $\sigma = (123)$?

b/ Exemple 2 : dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$, donner un exemple d'élément qui n'est pas d'ordre fini.

c/ Montrer que si G est fini, tout élément g de G est d'ordre fini.

d/ Soit g un élément de G d'ordre N, et soit m un entier. Etablir que $g^m = \mathrm{e}$ si et seulement si N divise m.

➤ **Partie B - Un théorème de Lagrange**. Le but de cette partie est d'établir que le cardinal de tout sous-groupe d'un groupe fini divise le cardinal de G. Soient donc G un groupe fini, et H un sous-groupe de G. Pour tout élément g de G, on note : $gH = \{g*h \,,\, h \in H\}$.

4/ Etablir que pour tout élément g de G, on a : $\mathrm{Card}\,(gH) = \mathrm{Card}\,(H)$.

5/ Soient g et g' deux éléments de G. Montrer que les ensembles gH et $g'H$ sont soit égaux, soit disjoints.

6/ En déduire que le cardinal de H divise celui de G.

7/ Application : établir que l'ordre d'un élément g de G divise le cardinal de G.

➤ **Partie C - Abélianité des groupes de cardinal 5**.

Un groupe G fini est appelé **cyclique** s'il existe un élément g de G tel que $G = \langle g \rangle$.

8/ Etablir que si G est un groupe cyclique, alors G est abélien.

9/ Montrer que si G est de cardinal 5, alors G est cyclique (donc abélien).[‡]

---

‡. Ce qui évite la très rébarbative rédaction de toutes les tables de multiplication possibles pour un groupe de cardinal 5. Plus généralement, la méthode utilisée dans ce problème permet d'affirmer que tout groupe dont le cardinal est un nombre premier est abélien.

QCM DE SYNTHESE

GROUPES, ANNEAUX, CORPS : MAINTENANT, TESTEZ-VOUS !

En prévision des futures évaluations, vous devez pouvoir répondre sans coup férir aux rapides questions suivantes, qui vous permettront de savoir si vous avez retenu les principaux mécanismes relatifs aux groupes, anneaux et corps.

NB : une ou plusieurs questions pourront vous être posées rapidement en début de colle 12.

A propos des groupes

1/ **Citer de mémoire 4 exemples de groupes : deux abéliens et deux non abéliens.**

2/ **Le produit scalaire est une ℓci sur $\mathbb{R}^2$.** ☐ Oui ☐ Non

3/ $(\mathbb{R}, -)$ **est un groupe.** ☐ Oui ☐ Non

4/ **Si E est un ensemble non vide, $\left(E^E, \circ\right)$ est un groupe.** ☐ Oui ☐ Non

5/ **Si E et F sont deux ensembles non vides, l'ensemble des bijections de E dans F est un groupe pour la composition.** ☐ Oui ☐ Non

6/ **L'ensemble des similitudes directes, muni de la composition, est un groupe abélien.** ☐ Oui ☐ Non

7/ **L'ensemble des rotations de centre O, muni de la composition, est un groupe abélien.** ☐ Oui ☐ Non

8/ **L'ensemble des homothéties, muni de la composition, est un groupe.** ☐ Oui ☐ Non

9/ $(\mathbb{K}_n[X], +)$ **est un groupe.** ☐ Oui ☐ Non

10/ **Tout sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ est non abélien.** ☐ Oui ☐ Non

A propos des anneaux

11/ **Citer de mémoire 4 exemples d'anneaux, dont au moins deux non intègres.**

12/ $(\mathbb{N}, +, \times)$ **est un anneau.** ☐ Oui ☐ Non

13/ $\left(\mathbb{R}_+^*, +, \times\right)$ **est un anneau.** ☐ Oui ☐ Non

14/ **Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivants constituent-ils des sous-anneaux de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$?**

a/ L'ensemble des suites de limite 0. ☐ Oui ☐ Non

b/ L'ensemble des suites de limite 1. ☐ Oui ☐ Non

c/ L'ensemble des suites convergentes. ☐ Oui ☐ Non

d/ L'ensemble des suites divergentes. ☐ Oui ☐ Non

e/ L'ensemble des suites positives. ☐ Oui ☐ Non

f/ L'ensemble des suites majorées. ☐ Oui ☐ Non

g/ L'ensemble des suites bornées. ☐ Oui ☐ Non

h/ L'ensemble des suites périodiques. ☐ Oui ☐ Non

15/ **Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ suivants constituent-ils des sous-anneaux de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$? L'ensemble. . .**

a/ . . . des fonctions continues et tendant vers 0 en $+\infty$. ☐ Oui ☐ Non

b/ . . . des fonctions continues et tendant vers $+\infty$ en $+\infty$. ☐ Oui ☐ Non

c/ . . . des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ☐ Oui ☐ Non

d/ . . . des combinaisons linéaires de cos et de de sin ("$f = \lambda \cos + \mu \sin$"). ☐ Oui ☐ Non

e/ . . . des fonctions continues et 2π-périodiques. ☐ Oui ☐ Non

16/ [§] **Les sous-ensembles de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ suivants constituent-ils des sous-anneaux de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$? L'ensemble. . .**

a/ . . . des matrices inversibles. ☐ Oui ☐ Non

b/ . . . des matrices diagonales, càd de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. ☐ Oui ☐ Non

c/ . . . des matrices triangulaires supérieures, càd de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. ☐ Oui ☐ Non

d/ . . . des matrices scalaires, càd de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. ☐ Oui ☐ Non

e/ . . . des matrices symétriques, càd de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. ☐ Oui ☐ Non

f/ . . . des matrices antisymétriques, càd de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. ☐ Oui ☐ Non

A propos des corps

17/ **Citer de mémoire 3 exemples de corps, et 3 exemples d'anneaux commutatifs qui ne sont pas des corps.**

18/ $\mathbb{Z}$ **est un corps.** ☐ Oui ☐ Non

19/ $\mathbb{R}_+^*$ **est un corps.** ☐ Oui ☐ Non

20/ $\mathbb{R}$ **est un corps.** ☐ Oui ☐ Non

21/ $\mathbb{K}[X]$ **est un corps.** ☐ Oui ☐ Non

22/ $\mathbb{C}$ **n'a d'autre sous-corps que** $\mathbb{C}$ **lui-même.** ☐ Oui ☐ Non

23/ $\mathbb{Q}$ **n'a d'autre sous-corps que** $\mathbb{Q}$ **lui-même.** ☐ Oui ☐ Non

§. Attendre le prochain chapitre pour répondre à cette question.