Chapitre 13 — Calcul matriciel

Table des matières

I. Les ensembles de matrices

I.1. Généralités.

Définition. Une **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{ij})_{i\in [\![1,n]\!];\, j\in [\![1,p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On peut se représenter une matrice $A = (a_{ij})_{i\in [\![1,n]\!];\, j\in [\![1,p]\!]}$ de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ comme un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemples et cas particuliers :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{K})$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{42}(\mathbb{K})$; et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$. [1]

2/ La **matrice nulle** de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls ; pour éviter les confusions, elle est notée $0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$.

1. Lorsque n et p sont égaux, on notera $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ plutôt que $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

3/ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice identité** de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, et est notée I_2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice identité** de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$, et est notée I_3. Plus généralement, la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, est une matrice carrée à n lignes et n colonnes dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, et les autres sont nuls.

4/ Une **matrice colonne** (*resp.* **ligne**) est un élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (*resp.* $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).

I.2. Opérations sur les matrices.

Remarque. Jusqu'à la fin de ce chapitre, pour une matrice $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, on notera $A = (a_{ij})$ plutôt que $A = (a_{ij})_{i \in [\![1,n]\!],\, j \in [\![1,p]\!]}$.

I.2.1. *Somme de deux matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$.*

Définition. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit la **somme des matrices** A **et** B et on note $A + B$ la matrice de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!] \times [\![\, 1, p \,]\!],\ (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Propriétés. Soient A, B et C trois matrices quelconques de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1/ **LCI** : $A + B \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$

2/ **Associativité** : $(A + B) + C = A + (B + C)$

3/ **Elément neutre** : $A + 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})} = A = 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})} + A$

4/ **Inverse** : $A + (-A) = 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})} = (-A) + A$ (en ayant noté $(-A) = (-a_{ij}) \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$)

5/ **Commutativité** : $A + B = B + A$

En d'autres termes : $(\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ **est un groupe abélien**.

Remarque : pour $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice $(-A)$ est appelée **matrice opposée** de A.

I.2.2. *Multiplication par un scalaire dans $M_{np}(\mathbb{K})$.* .

Définition. Soient $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice λA comme la matrice de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!] \times [\![\, 1, p \,]\!],\ (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Exemple : $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 9 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

➢ **Un mot sur les combinaisons linéaires**. Si $(A_k)_{k\in[\![1;m]\!]}$ est une famille d'éléments de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, une **combinaison linéaire** de ces matrices s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k A_k$, les λ_k étant des scalaires quelconques. Par exemple, toute matrice de $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de quatre matrices (appelées matrices *élémentaires*), explicitement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

Dans cette situation, nous dirons un peu plus tard que la famille $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ est une *base* du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. [2]

I.2.3. *Produit matriciel.*

Définition. Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On définit la **matrice produit** $A \times B$ (ou AB) comme la matrice de $\mathrm{M}_{nq}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1, n \,]\!] \times [\![\, 1, q \,]\!],\ (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Remarque 1. Dans un sens qui sera rendu plus précis au second semestre, le coefficient $(AB)_{ij}$ est le produit scalaire de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B.

Remarque 2. Le produit de deux matrices $A \times B$ est défini si et seulement si le nombres de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Explicitement, en posant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le produit AB est défini tandis que le produit BA ne l'est pas !

Au passage d'ailleurs, on a : $AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Il se peut encore que les produits AB et BA soient simultanément définis, mais ne soient pas de même format. Pour illustrer cette affirmation, considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette situation, les produits AB et BA existent, mais : $AB \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ tandis que $BA \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$. Explicitement :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Pour vous donner des exemples plus familiers, $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$; $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

En résumé, dans un produit matriciel, il faut faire très attention à l'ordre!

Remarque 3. Lorsque le produit AB est défini, **la matrice AB hérite du nombre de lignes de A et du nombre de colonnes de B**.

(Propriétés du produit matriciel). Sous réserve que les produits suivants soient définis, on a :

1/ $A(BC) = (AB)C$ (associativité)

2/ $A(B+C) = AB + AC$ (distributivité par rapport à la somme)

3/ $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ (compatibilité avec la multiplication par un scalaire)

Remarque. **Attention!!! Le produit matriciel n'est pas commutatif.**

Un exemple pour illustrer cette affirmation : on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.2.4. *Transposée d'une matrice.*

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$ est la matrice de $\mathrm{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie en posant : $\forall\, i \in [\![1; p]\!]$, $\forall\, j \in [\![1; n]\!]$, $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$.

Informellement, la transposée de A est obtenue en "écrivant en colonnes les lignes de A".

Exemple. En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, on a : ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriétés de la transposée.

1/ $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\,(A,B) \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})^2$, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB$ (**linéarité**)

2/ $\forall A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, ${}^t({}^tA) = A$

3/ $\forall A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

II. Matrices carrées

II.1. L'anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice est **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes ("$n = p$").

Le groupe abélien des matrices carrées à n lignes et n colonnes (de taille n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (plutôt que $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

La matrice **identité** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, est la matrice n'ayant que des 1 sur sa diagonale, des 0 partout ailleurs. Plus précisément :

$$\forall\ (i,j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2,\ (\mathrm{I}_n)_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Notation. Pour faire plus court, on peut réécrire la définition précédente en utilisant le **symbole de Kronecker** :

$$\forall\ (i,j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2,\ (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$$

le symbole de Kronecker δ_{ij} étant défini comme l'entier égal à 1 lorsque $i = j$, nul sinon.

La matrice I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, càd :

$$\forall\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A$$

Conséquence. La matrice I_n, et plus généralement la matrice $\lambda \mathrm{I}_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, dans le sens où :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ A(\lambda \mathrm{I}_n) = (\lambda \mathrm{I}_n) A = \lambda A$$

Propriété. $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (**non commutatif et non intègre** pour $n \geqslant 2$).

Pour illustrer le fait que l'anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni commutatif, ni intègre, considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\,; \qquad B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\,; \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut en conclure que $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ n'est ni commutatif ($AB \neq BA$), ni intègre ($BA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$ avec A et B non nulles). Cet exemple se généralise à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ (il suffit de rajouter suffisamment de zéros !).

II.2. Sous-anneaux remarquables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Définitions. Une matrice carrée est :

- **diagonale** lorsque tous ses coefficients sont nuls en dehors de la diagonale.
  Explicitement, une matrice diagonale est une matrice $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
  $$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ [i \neq j] \Longrightarrow [d_{ij} = 0]$$
- **triangulaire supérieure** lorsque :
  $$\forall\ (i,j) \in [\![1; n]\!]^2,\ (i > j) \Rightarrow (a_{ij}) = 0$$
- **triangulaire inférieure** lorsque :
  $$\forall\ (i,j) \in [\![1; n]\!]^2,\ (i < j) \Rightarrow (a_{ij}) = 0$$

Informellement, une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) est une matrice carrée dont tous les coefficients situés strictement en-dessous (*resp.* au-dessus) de la diagonale sont nuls.

Exemples.

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$, les matrices : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures.

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$, les matrices : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires inférieures.

La matrice identité I_n et la matrice nulle $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ sont des matrices triangulaires supérieures et inférieures.

Plus généralement, toute matrice diagonale est une matrice triangulaire supérieure et inférieure.

Enfin, en général, une matrice triangulaire supérieure s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Tandis qu'une matrice triangulaire inférieure s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n} \end{pmatrix}$

Notations : notons $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^-(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

On peut observer que : $\boxed{\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathrm{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathrm{D}_n(\mathbb{K})}$.

Propriété. $(\mathrm{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, $\left(\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}), +, \times\right)$ et $\left(\mathrm{T}_n^-(\mathbb{K}), +, \times\right)$ sont des sous-anneaux de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

En outre, l'anneau $(\mathrm{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est commutatif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, pour $n \geqslant 2$, aucun de ces anneaux n'est intègre, et les anneaux $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^-(\mathbb{K})$ ne sont pas commutatifs.

Remarque. On a déjà évoqué de nombreuses fois la non-commutativité du produit matriciel. Pour ne pas radoter, l'essentiel à retenir de la propriété ci-dessus est que :

➤ le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure ;

➤ le produit de deux matrices diagonales est particulièrement simple à effectuer :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

II.3. Calcul de A^N.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et soit N un entier naturel. On définit la matrice $\boldsymbol{A^N}$ en posant :

$$A^0 = \mathrm{I}_n, \text{ et pour tout } N \in \mathbb{N}^*,\ A^N = A \times A^{N-1}$$

II.3.1. *Cas triviaux.*

Il existe quelques cas où le calcul de A^N est particulièrement simple :

➤ $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n^N = \mathrm{I}_n$

➤ $\forall\, N \in \mathbb{N},\ [\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)]^N = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^N, \ldots, \lambda_n^N\right)$

➤ Lorsque A est nilpotente, A^N et nulle à partir d'un certain entier naturel. Par exemple, si :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors } A^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$$

D'où : $A^N = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$ pour tout entier $N \geqslant 3$.

Plus généralement, toute matrice triangulaire *stricte* (càd triangulaire avec des coefficients diagonaux tous nuls) est nilpotente.

II.3.2. *Par récurrence.*

En-dehors des cas évidents du paragraphe précédent, une autre méthode pour calculer A^N consiste à prouver une formule (donnée dans l'énoncé ou conjecturée) par récurrence sur N.

Exemple 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

La preuve de l'hérédité dans ce cas est fournie par le fait que :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

Exemple 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3.3. *Avec le binôme de Newton.*

Lorsque le calcul de A^N n'est pas aisé à faire par récurrence (en cas de conjecture “compliquée”), on peut tenter d'utiliser la formule du binôme de Newton, en n'oubliant pas de vérifier l'hypothèse nécessaire à son application.

Formule du binôme de Newton dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $\underline{AB = BA}$, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k} = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{N-k}B^k$$

Exemple d'application. Posons : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observons que : $A = 2\mathrm{I}_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➤ On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant 3) \Longrightarrow \left(B^k = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}\right) \quad (\spadesuit)$.[3]

➤ On a : $(2\mathrm{I}_3) \times B = B \times (2\mathrm{I}_3) \quad (\clubsuit)$. En effet, toute matrice de la forme $(\lambda\,\mathrm{I}_3)$[4] commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$.

3. Ainsi la matrice B est nilpotente.
4. Une telle matrice est appelée matrice **scalaire**.

➤ Soit N un entier naturel. On a : $A^N = (2\mathrm{I}_3 + B)^N$. Grâce à (♣), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$A^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k \left(2\mathrm{I}_3\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k$$

D'après (♠), on a encore :

$$A^N = \sum_{k=0}^{2} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k = 2^N \underbrace{B^0}_{=\mathrm{I}_3} + N2^{N-1}B + \frac{N(N-1)}{2}\, 2^{N-2} B^2$$

Explicitement :

$$A^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & N2^{N-1} & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N(N-1)2^{N-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\forall\, N \in \mathbb{N},\ A^N = \begin{pmatrix} 2^N & N2^{N-1} & N\left(N+3\right)2^{N-3} \\ 0 & 2^N & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}}$$

II.3.4. *Et après ?*

Les méthodes évoquées précédemment ne sont pas les seules permettant de calculer A^N : au programme de cette année, il en existe deux autres, que nous rencontrerons cette année dans le chapitre sur les polynômes (au printemps), puis dans un chapitre d'algèbre linéaire (sans doute au mois de mai).

II.4. Matrices symétriques et antisymétriques.

Définition. Une matrice carrée A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** (*resp.* **antisymétrique**) lorsque

$${}^tA = A \qquad (\textit{resp. } {}^tA = -A)$$

Notations. Dans ce chapitre, nous conviendrons de noter $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques et antisymétriques respectivement, càd :

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ {}^tA = A\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ {}^tA = -A\}$$

Exemples.

1/ La matrice nulle $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ est symétrique et antisymétrique.

2/ La matrice identité I_n est symétrique, mais pas antisymétrique.

3/ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas antisymétrique.

4/ La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais pas symétrique.

5/ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique ni antisymétrique.

6/ La matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est symétrique (*resp.* antisymétrique) si $\theta = 0\ [\pi]$ (*resp.* $\theta = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$) ; ni symétrique ni antisymétrique lorsque $\theta \neq 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Propriétés.

1/ $(\mathrm{S}_n(\mathbb{K}), +)$ et $(\mathrm{A}_n(\mathbb{K}), +)$ sont des sous-groupes de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

2/ $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire, càd :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (A, B) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})^2,\ (\lambda A + \mu B) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$$

3/ $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire, càd :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (A, B) \in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})^2,\ (\lambda A + \mu B) \in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$$

4/ Une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros sur sa diagonale.

5/ La matrice nulle $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ est la seule matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ simultanément symétrique et antisymétrique, càd :

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$$

Remarque. Attention, il n'est pas vrai en général que le produit de deux matrices symétriques est encore une matrice symétrique. Considérons par exemple les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que A et B **sont symétriques**. En revanche :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

AB **n'est donc pas symétrique**.

D'une certaine manière, les matrices symétriques et antisymétriques jouent pour les matrices carrées le même rôle que les fonctions paires et impaires pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Cette analogie est rendue plus explicite par l'énoncé ci-dessous, qui vous rappellera sans doute un théorème vu à l'issue du premier chapitre du cours de cette année.

Théorème (décomposition "Symétrique + Antisymétrique").

Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Avec des quantificateurs :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists!\ (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}),\ M = S + A$$

Explicitement : $S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$.

III. Matrices inversibles

Dans ce paragraphe, on ne considère que des matrices carrées, la définition de matrice inversible nécessitant que l'on travaille dans un anneau de matrices.[5]

III.1. Généralités.

Définition. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** si elle est inversible pour la multiplication dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

En d'autres termes, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = \mathrm{I}_n \qquad \textbf{et} \qquad B \times A = \mathrm{I}_n$$

Notations. On a établi au chapitre 12 que lorsque A est inversible, la matrice B de la définition ci-dessus est unique ; elle est alors appelée **inverse de** A, et elle est notée A^{-1}.

Par ailleurs, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Avec les notations du chapitre précédent, on a : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*$.[6] l'ensemble des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

En particulier, on déduit de résultats généraux démontrés au chapitre 12 l'énoncé ci-dessous.

Propriétés. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

En outre, si A et B appartiennent à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors :

➤ $(A \times B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

➤ $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$

Remarque et terminologie. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire**. Il est (évidemment) non abélien pour tout $n \geqslant 2$.

Par exemple, la matrice $A = \mathrm{diag}(1, -1)$ est inversible, et $A^{-1} = A$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque $AB \neq BA$, cet exemple illustre que le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est non abélien.

---

5. Et, si vous avez bien suivi ce qui précède, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau (non commutatif et non intègre) ; mais $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ n'en est pas un si $n \neq p$, puisque l'on ne peut alors pas multiplier deux matrices de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ entre elles ("pas de seconde ℓci").
6. Pour un anneau $(A, +, \times)$, la notation A^* désigne en effet l'ensemble des éléments inversibles pour la loi "$\times$".

Avant de donner les premières méthodes relatives à ce paragraphe, on donne un énoncé d'importance cruciale en pratique (dont la preuve sera donnée dans le cours d'algèbre linéaire).

> **Propriété**. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
> $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
> $$A \times B = \mathrm{I}_n \qquad \textbf{ou} \qquad B \times A = \mathrm{I}_n$$

III.2. **Matrices “évidemment” inversibles, et “évidemment” non-inversibles.**

➢ I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$. Plus généralement, pour tout scalaire λ non nul, la matrice $\lambda\mathrm{I}_n$ est inversible, et $(\lambda\mathrm{I}_n)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{I}_n$.

➢ $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ est évidemment non inversible.

➢ Plus généralement, la matrice $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible SSI tous les λ_i sont non nuls.

Lorsque tel est le cas, on a :

$$[\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)]^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

➢ Pour tout scalaire α, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➢ La matrice nulle n'est pas inversible, mais il ne suffit pas qu'une matrice soit non nulle pour être inversible : par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ <u>ne</u> sont <u>pas</u> inversibles (bien que non nulles).

> Pour généraliser ces 2 exemples, nous démontrerons qu'une matrice A **<u>n'</u>est <u>pas</u> inversible** si :
> — une ligne ou une colonne de A est nulle ;
> — A possède deux lignes ou deux colonnes égales ;
> — A possède deux lignes ou deux colonnes proportionnelles ;
> — une ligne (*resp.* colonne) de A est combinaison linéaire des autres lignes (*resp.* colonnes) de A.

Par exemple, les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles.

III.3. Matrices inversibles dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Théorème (Description de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{K})$).

Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Son inverse est alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Terminologie. Mêmes notations que dans le théorème. Le scalaire $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté $\det A$.

En utilisant le déterminant, le théorème précédent devient :

$$\left[A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\right] \Longleftrightarrow [\det(A) \neq 0]$$

Et lorsque $\det A \neq 0$ on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1/ La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible puisque $\det A = -2$, et $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible puisque $\det A = 0$.

Pour achever ce chapitre, et anticiper sur la suite du cours de cette année, on peut citer les propriétés suivantes du déterminant dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Propriétés du déterminant dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$.

1/ $\forall (A, B) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})^2, \ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

2/ $\forall A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}), \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$

3/ $\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}), \ \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

4/ $\forall A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}), \ \det({}^tA) = \det(A)$

III.4. Matrices inversibles et systèmes linéaires.

“Il n'y a plus qu'à” étudier le cas des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout entier naturel $n \geqslant 3\ldots$

Ceci passe essentiellement par l'énoncé suivant, qui fait le lien entre l'inversibilité de A et la résolution d'un système linéaire.

Théorème (Caractérisation des éléments de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une (unique) solution.

Lorsque tel est le cas, l'unique solution du système $AX = B$ est $A^{-1}B$ (qui est en effet un élément de $\mathbb{K}^n$).

Exemple 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On veut déterminer si A est inversible, et dans l'affirmative obtenir A^{-1}.

A cette fin, on introduit un vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et on résout le système : $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ désigne un vecteur inconnu.

Pratiquement :

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & b_1 \\ x_2 - x_3 & = & b_2 \\ x_3 & = & b_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & b_1 + b_2 + b_3 \\ x_2 & = & b_2 + b_3 \\ x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que le système $AX = B$ admet une unique solution (pour tout choix de B), puisque le triplet (x_1, x_2, x_3) est déterminé de manière unique en fonction de b_1, b_2 et b_3. On en déduit déjà que A **est inversible**.

Puisqu'en outre on sait que dans ce cas l'unique solution de $AX = B$ est $A^{-1}B$, la lecture des coefficients intervenant devant b_1, b_2 et b_3 dans les expressions de x_1, x_2 et x_3 permet d'obtenir A^{-1}, à savoir : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2. On considère la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{K})$.

On veut déterminer si B est inversible, et dans l'affirmative obtenir B^{-1}.

On fixe donc C un vecteur arbitraire de $\mathbb{K}^4$, et on cherche $X \in \mathbb{K}^4$ tel que $BX = C$.

$$BX = C \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & & = & c_1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & c_2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & c_3 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & c_4 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -c_3 - c_4 \\ x_1 & = & c_1 - c_3 - c_4 \\ x_3 & = & -c_1 - c_2 \\ x_4 & = & -c_1 - c_2 + c_4 \end{array} \right.$$

Conclusion : B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On veut déterminer si A est inversible, et dans l'affirmative obtenir A^{-1}.

A cette fin, on introduit un vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et on résout le système : $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ désigne un vecteur inconnu.

Or : $AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ x_2 - x_3 & = & b_2 \\ 0 & = & b_3 \end{array} \right.$

Clairement, la dernière équation n'est vérifiée que lorsque b_3 est nul, et le système $AX = B$ n'admet donc pas de solution pour <u>tout</u> $B \in \mathbb{K}^3$. Il s'ensuit que **la matrice A n'est pas inversible**.

IV. Matrices semblables

Définition. Deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.

Exemples.

1/ La matrice identité I_n n'est semblable qu'à elle-même.

2/ La matrice nulle $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est semblable qu'à elle-même.

3/ Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice P est inversible (car $\det(P) \neq 0$) et : $P^{-1} = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a alors $P^{-1}AP = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Soit : $P^{-1}AP = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ d'où finalement : $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix}}$

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix}$ sont donc **semblables**.

4/ Pour d'autres exemples, voir les 1974 exercices d'entraînement en ligne sur ce thème.

Propriétés des matrices semblables.

1/ La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, càd :

a/ **Réflexivité** : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \ A \simeq A$

b/ **Symétrie** : $\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2, \ [A \simeq B] \Longleftrightarrow [B \simeq A]$

c/ **Transitivité** : $\forall (A, B, C) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^3, \ [(A \simeq B) \wedge (B \simeq C)] \Longrightarrow [A \simeq C]$

2/ Deux matrices semblables ont même **trace**, càd :

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2, \ [A \simeq B] \Longrightarrow [\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)]$$

Dans ce contexte, on dit que la trace est un **invariant de similitude**.

On achève ce chapitre par une "propriété" extrêmement utile en pratique. Le plus souvent, **on vous demandera de ne pas utiliser cette propriété telle quelle**, mais de savoir la redémontrer. Dans le contexte des Concours, il s'agit donc d'une "question classique".

(Exercice classique). Soient A et D deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et D sont semblables, alors A^n et D^n sont semblables pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Plus précisément, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1}A^nP \quad \text{ou, ce qui revient au même :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

Cette propriété fournit donc une nouvelle méthode pour le calcul des puissances d'une matrice. L'exemple ci-dessous illustre cette méthode.

Exemple. Calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $P^{-1}AP = D$ avec $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = PD^nP^{-1}$.

Explicitement, pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/4)^n & 0 \\ 0 & (-3/4)^n \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow A^n = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/4)^n & 0 \\ 0 & (-3/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^n = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/4)^n & (-1/4)^n \\ (-3/4)^n & 3(-3/4)^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^n = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n & -3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n & \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$

V. Synthèse - A savoir, à savoir faire

En résumé, voici la liste des connaissances et des savoir-faire à acquérir dans la première partie ce chapitre :

- Connaître TOUS les énoncés du chapitre présentés dans ce résumé, et savoir les appliquer.
- Comme ce chapitre est très calculatoire, il faut vous entraîner (calculs de produits, de puissances, d'inverses) pour gagner en efficacité sur le thème des matrices.
- En particulier, il est important de s'entraîner au calcul de "P^{-1}" et de "$P^{-1}AP$" (dernier paragraphe de ce cours) ; les applications et interprétations de ces calculs seront vus en algèbre linéaire, cette année et en Spé.