

<b>EXERCICES 13 – CALCUL MATRICIEL</b>
--

<b>PRODUITS ET PUISSANCES DE MATRICES</b>
---

**EXERCICE 1.** — Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE 2.** — Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Déterminer toutes les matrices  $B$  de  $M_2(\mathbb{R})$  telles que  $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ .
- 2) Déterminer toutes les matrices  $C$  de  $M_2(\mathbb{R})$  telles que  $AC = CA = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ .

**EXERCICE 3.** — (**Commutant d'une matrice**). Déterminer le **commutant** de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  ( $a$  et  $b$  réels distincts), c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $M \in M_2(\mathbb{K})$  telles que  $AM = MA$ .

**EXERCICE 4.** — (**Commutant d'une matrice diagonale dans  $M_2(\mathbb{K})$** ). Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices de  $M_2(\mathbb{K})$  qui **commutent** avec  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $M$  de  $M_2(\mathbb{K})$  telles que  $AM = MA$ .\*

**EXERCICE 5.** — (**Commutant d'une matrice diagonale, cas général**). Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $n$  réels distincts, et  $D$  la matrice diagonale  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Déterminer les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $D$ .

**EXERCICE 6.** — (**Commutant d'une matrice, encore**). Soient  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $\text{COM}(A)$  le commutant de la matrice  $A$ , que l'on ne présente plus. Montrer que  $(\text{COM}(A), +)$  est un groupe.

**EXERCICE 7.** — Dans chacun des cas suivants, calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ 3/ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4/ A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**EXERCICE 8.** — Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Calculer  $A(\theta)A(\varphi)$ , puis en déduire  $(A(\theta))^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**EXERCICE 9.** — On considère les matrices  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B^n$  puis  $C^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**EXERCICE 10.** — (**Racines carrées de la matrice nulle**).

Déterminer toutes les matrices  $M \in M_2(\mathbb{C})$  telles que :  $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})}$ .

**EXERCICE 11.** — (**Racines carrées de la matrice identité**).

Déterminer toutes les matrices  $M \in M_2(\mathbb{C})$  telles que :  $M^2 = I_2$ .

**EXERCICE 12.** — (**Racines carrées d'une matrice**).

Déterminer toutes les matrices  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telles que :  $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ . La réponse change-t-elle si l'on considère  $M \in M_2(\mathbb{C})$  ?

\*. L'ensemble de ces matrices est appelé le commutant de la matrice  $A$ .

## MATRICES INVERSIBLES

**EXERCICE 13.** — Lorsque c'est possible, calculer l'inverse de la matrice  $A$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3/ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ 4/ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 6/ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**EXERCICE 14.** — Calculer l'inverse (lorsque c'est possible) de la matrice  $A$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 3/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4/ A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix} \\ \text{(avec } t \text{ réel quelconque)} \\ 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 6/ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7/ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 8/ A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ 9/ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**EXERCICE 15.** — On considère la matrice de  $M_4(\mathbb{R})$  suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$  (en utilisant la méthode " $AX=B$ ").
- 2) Une autre méthode pour le calcul de  $A^{-1}$ .
  - a) Calculer  $A^2$ , et vérifier que  $A^2 = -I_4$ .
  - b) Dédire de la question précédente que  $A$  est inversible, et préciser  $A^{-1}$ .

**EXERCICE 16.** — Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

- 1/ Calculer  $(A + I)^3$ .
- 2/ Dédire de la question précédente que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**EXERCICE 17.** — Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A^4 + 2A^2 + 5A - I_n = 0$ . Montrer que  $A$  est inversible, et exprimer son inverse en fonction de  $A$ .

**EXERCICE 18.** — On considère la matrice  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

- 1/ Calculer  $M^2(a, b)$ .
- 2/ Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels  $M^2(a, b) = \alpha I_3 + \beta M(a, b)$ .
- 3/ Dédire de la question précédente à quelle(s) condition(s) sur les réels  $a$  et  $b$  la matrice  $M(a, b)$  est inversible. Et lorsque c'est possible, expliciter alors  $(M(a, b))^{-1}$ .

**EXERCICE 19.** — Soit  $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Pour  $n$  entier naturel non-nul, calculer  $(M + I_3)^n$ .
- 2) Dédire de la question précédente que  $M$  est inversible, et expliciter son inverse.
- 3) Déterminer  $M^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

MATRICES SEMBLABLES (“ $B = P^{-1}AP$ ”)

**EXERCICE 20.** — On considère les matrices de  $M_3(\mathbb{R})$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer  $P^{-1}$ .
- 2) Vérifier que  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale.
- 3) Déterminer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**EXERCICE 21.** — (**CB1, partie spécifique aux PCSI**). Dans cette partie, on cherche à déterminer le terme général de la suite réelle  $(u_n)$  satisfaisant la relation  $(\star)$  suivante

$$(\star) \quad u_0 = 3, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On suppose que la suite  $(u_n)$  vérifie la relation  $(\star)$ . On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer qu’il existe une matrice  $A \in M_3(\mathbb{R})$  que l’on explicitera telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ .
- 2) Etablir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ . Que vaut  $X_0$  ?

3) On pose  $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse.

4) Soit  $T = P^{-1}AP$ . Vérifier que  $T = D + N$  où  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

5) Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$ .

6) En déduire l’expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

*Indication : vous avez montré précédemment que pour tout  $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0$ . Commencez par calculer  $P^{-1}X_0$ , puis multipliez à gauche par  $T^n$ , puis multipliez à gauche par  $P$ ...*

**EXERCICE 22.** — On note :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
- 2) Calculer  $D = P^{-1}AP$ , et vérifier que  $D$  est diagonale.
- 3) Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ .
- 4) **Etude du commutant de  $A$ .** Dans cette question, on cherche à déterminer le commutant de la matrice  $A$ , c-à-d l’ensemble noté  $\text{COM}(A)$  des matrices  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telles que  $AM = MA$ .
  - a) Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  quelconque. On pose  $N = P^{-1}MP$ . Montrer que :  $[AM = MA] \iff [ND = DN]$ .
  - b) Déterminer  $\text{COM}(D)$ . En déduire  $\text{COM}(A)$ .

MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

**EXERCICE 23.** — Dans chacun des cas suivants, écrire  $M$  sous la forme  $S + A$  avec  $S$  symétrique et  $A$  antisymétrique.

$$1) M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{ch}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & -\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix} \quad 3) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE 24.** — (**Généralisation – Matrices symétriques et antisymétriques dans  $M_n(\mathbb{R})$** ). Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

- 1/ Ecrire la forme générale d'une matrice symétrique dans  $M_n(\mathbb{R})$ , puis celle d'une matrice antisymétrique de  $M_n(\mathbb{R})$ .
- 2/ A l'aide de ce qui précède, montrer que toute matrice symétrique (*resp.* antisymétrique) peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $s_n$  (*resp.*  $a_n$ ) matrices. Exprimer  $s_n$  et  $a_n$  en fonction de  $n$ .

DIVERS

**EXERCICE 25.** — (**Calcul matriciel et Python – Résolution de systèmes  $2 \times 2$** ). Ecrire un programme chargé de faire pour vous la résolution d'un système linéaire de la forme :  $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = b_1 \\ cx_1 + dx_2 = b_2 \end{cases}$

Concrètement, le programme devra demander à l'utilisateur les valeurs de  $a, b, c, d, b_1$  et  $b_2$  et renvoyer un message du genre "Pas d'unicité de la solution" lorsque c'est le cas, et renvoyer l'unique couple solution sinon.

**EXERCICE 26.** — Soit  $A$  une matrice **nilpotente** de  $M_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire telle que  $A^m = 0$  pour un certain entier naturel  $m$ .

- 1) Montrer que  $I_n - A$  est inversible, et expliciter son inverse.

- 2) En déduire l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE 27.** — Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$  telle que :  $M \times {}^t M \times M = I_3$ .  
Montrer que  $M$  est inversible. Puis montrer que  $M$  est symétrique.

**EXERCICE 28.** — Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ , et soit  $\omega \in \mathbb{U}_n$ , avec  $\omega \neq 1$ .  
On définit une matrice  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  en posant  $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ .

- 1) Calculer  $A\bar{A}$  (où  $\bar{A}$  désigne la matrice conjuguée de  $\mathbb{C}$ , définie en posant :  $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$ ).
- 2) En déduire que  $A$  est inversible, et expliciter  $A^{-1}$ .

**EXERCICE 29.** — Etablir qu'il existe exactement 125 matrices  $M$  de  $M_4(\mathbb{C})$ , que l'on précisera, telles que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE 30.** — Dans  $M_9(\mathbb{K})$ , on considère l'ensemble  $F$  des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.

Montrer qu'il existe 73 matrices de  $M_9(\mathbb{K})$  telle que toute matrice de  $F$  est combinaison linéaire de celles-ci.