

EXERCICES 13 – CALCUL MATRICIEL
--

PRODUITS ET PUISSANCES DE MATRICES

EXERCICE 1. — Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2. — Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer toutes les matrices B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.
- 2) Déterminer toutes les matrices C de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

EXERCICE 3. — (**Commutant d'une matrice**). Déterminer le **commutant** de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels distincts), c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

EXERCICE 4. — (**Commutant d'une matrice diagonale dans $M_2(\mathbb{K})$**). Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices de $M_2(\mathbb{K})$ qui **commutent** avec A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $M_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.*

EXERCICE 5. — (**Commutant d'une matrice diagonale, cas général**). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels distincts, et D la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D .

EXERCICE 6. — (**Commutant d'une matrice, encore**). Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\text{COM}(A)$ le commutant de la matrice A , que l'on ne présente plus. Montrer que $(\text{COM}(A), +)$ est un groupe.

EXERCICE 7. — Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n .

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ 3/ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4/ A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

EXERCICE 8. — Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)A(\varphi)$, puis en déduire $(A(\theta))^n$ pour tout entier naturel n .

EXERCICE 9. — On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^n puis C^n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 10. — (**Racines carrées de la matrice nulle**).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = 0_{M_2(\mathbb{C})}$.

EXERCICE 11. — (**Racines carrées de la matrice identité**).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = I_2$.

EXERCICE 12. — (**Racines carrées d'une matrice**).

Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. La réponse change-t-elle si l'on considère $M \in M_2(\mathbb{C})$?

*. L'ensemble de ces matrices est appelé le commutant de la matrice A .

MATRICES INVERSIBLES

EXERCICE 13. — Lorsque c'est possible, calculer l'inverse de la matrice A dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3/ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ 4/ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 6/ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

EXERCICE 14. — Calculer l'inverse (lorsque c'est possible) de la matrice A dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2/ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 3/ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4/ A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix} \\ \text{(avec } t \text{ réel quelconque)} \\ 5/ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 6/ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7/ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 8/ A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ 9/ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

EXERCICE 15. — On considère la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (en utilisant la méthode " $AX=B$ ").

2) Une autre méthode pour le calcul de A^{-1} .

a) Calculer A^2 , et vérifier que $A^2 = -I_4$.

b) Dédire de la question précédente que A est inversible, et préciser A^{-1} .

EXERCICE 16. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer $(A + I)^3$.

2/ Dédire de la question précédente que A est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE 17. — Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^4 + 2A^2 + 5A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction de A .

EXERCICE 18. — On considère la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

1/ Calculer $M^2(a, b)$.

2/ Montrer qu'il existe deux réels α et β tels $M^2(a, b) = \alpha I_3 + \beta M(a, b)$.

3/ Dédire de la question précédente à quelle(s) condition(s) sur les réels a et b la matrice $M(a, b)$ est inversible. Et lorsque c'est possible, expliciter alors $(M(a, b))^{-1}$.

EXERCICE 19. — Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Pour n entier naturel non-nul, calculer $(M + I_3)^n$.
- 2) Dédire de la question précédente que M est inversible, et expliciter son inverse.
- 3) Déterminer M^n pour tout entier naturel n .

MATRICES SEMBLABLES (“ $B = P^{-1}AP$ ”)

EXERCICE 20. — On considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer P^{-1} .
- 2) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
- 3) Déterminer A^n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 21. — (**CB1, partie spécifique aux PCSI**). Dans cette partie, on cherche à déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) satisfaisant la relation (\star) suivante

$$(\star) \quad u_0 = 3, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On suppose que la suite (u_n) vérifie la relation (\star) . On pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer qu’il existe une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ que l’on explicitera telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
- 2) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$. Que vaut X_0 ?

3) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

4) Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

6) En déduire l’expression de u_n en fonction de n .

Indication : vous avez montré précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0$. Commencez par calculer $P^{-1}X_0$, puis multipliez à gauche par T^n , puis multipliez à gauche par P ...

EXERCICE 22. — On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- 2) Calculer $D = P^{-1}AP$, et vérifier que D est diagonale.
- 3) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
- 4) **Etude du commutant de A .** Dans cette question, on cherche à déterminer le commutant de la matrice A , c-à-d l’ensemble noté $\text{COM}(A)$ des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
 - a) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que : $[AM = MA] \iff [ND = DN]$.
 - b) Déterminer $\text{COM}(D)$. En déduire $\text{COM}(A)$.

MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

EXERCICE 23. — Dans chacun des cas suivants, écrire M sous la forme $S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique.

$$1) M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{ch}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & -\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix} \quad 3) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 24. — (**Généralisation – Matrices symétriques et antisymétriques dans $M_n(\mathbb{R})$**). Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

- 1/ Ecrire la forme générale d'une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$, puis celle d'une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.
- 2/ A l'aide de ce qui précède, montrer que toute matrice symétrique (*resp.* antisymétrique) peut s'écrire comme combinaison linéaire de s_n (*resp.* a_n) matrices. Exprimer s_n et a_n en fonction de n .

DIVERS

EXERCICE 25. — (**Calcul matriciel et Python – Résolution de systèmes 2×2**). Ecrire un programme chargé de faire pour vous la résolution d'un système linéaire de la forme : $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = b_1 \\ cx_1 + dx_2 = b_2 \end{cases}$

Concrètement, le programme devra demander à l'utilisateur les valeurs de a, b, c, d, b_1 et b_2 et renvoyer un message du genre "Pas d'unicité de la solution" lorsque c'est le cas, et renvoyer l'unique couple solution sinon.

EXERCICE 26. — Soit A une matrice **nilpotente** de $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telle que $A^m = 0$ pour un certain entier naturel m .

- 1) Montrer que $I_n - A$ est inversible, et expliciter son inverse.

- 2) En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 27. — Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \times {}^t M \times M = I_3$.
Montrer que M est inversible. Puis montrer que M est symétrique.

EXERCICE 28. — Soit n un entier ≥ 2 , et soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, avec $\omega \neq 1$.
On définit une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ en posant $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

- 1) Calculer $A\bar{A}$ (où \bar{A} désigne la matrice conjuguée de \mathbb{C} , définie en posant : $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$).
- 2) En déduire que A est inversible, et expliciter A^{-1} .

EXERCICE 29. — Etablir qu'il existe exactement 125 matrices M de $M_4(\mathbb{C})$, que l'on précisera, telles que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 30. — Dans $M_9(\mathbb{K})$, on considère l'ensemble F des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.

Montrer qu'il existe 73 matrices de $M_9(\mathbb{K})$ telle que toute matrice de F est combinaison linéaire de celles-ci.