

COLLE 14 – QUESTIONS DE COURS

Remarque : la transposée d'une matrice A pourra être notée ${}^T A$, ${}^t A$, A^T ou A^t en fonction de la direction du vent, ou de la valeur modulo 4 du jour de la semaine où on l'écrit.

QUESTION DE COURS 1. — Propriété : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. On montrera ici que : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \times I_n = A$ et on pourra admettre $I_n \times A = A$.

Soient n un entier naturel non nul, et $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

Notons $P = (p_{ij})$ la matrice produit $A \times I_n$. On rappelle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.*

Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (I_n)_{kj}$.

Or $(I_n)_{kj} = 0$ pour $k \neq j$, et $(I_n)_{jj} = 1$. Il s'ensuit que : $P_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P_{ij} = a_{ij}$. Donc $P = A$, et donc : $A \times I_n = A$.

QUESTION DE COURS 2. — Théorème : toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, soit

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}), M = S + A$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.

► Analyse : supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que : $M = S + A$.

Alors : ${}^t M = {}^t S + {}^t A$. Or par hypothèse ${}^t S = S$ et ${}^t A = -A$. On a donc : ${}^t M = S - A$.

Il s'ensuit que S et A sont solutions du système : $\begin{cases} S + A = M \\ S - A = {}^t M \end{cases}$

La résolution aisée de celui-ci donne : $S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$.

► Synthèse : il ne reste plus qu'à vérifier que le couple (S, A) obtenu précédemment convient. Pour cela on commence par s'assurer que $M = S + A$ (trivial). En outre :

► en posant $S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$, on a : ${}^t S = \frac{1}{2}({}^t M + {}^t({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M + M) = \frac{1}{2}(M + {}^t M) = S$; donc S est symétrique;

► et en posant $A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$, on a : ${}^t A = \frac{1}{2}({}^t M - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^t M) = -A$; donc A est antisymétrique.

Conclusion (partielle) : on a établi l'existence, pour toute matrice carrée M d'un couple (S, A) (avec S symétrique et A antisymétrique) tel que : $M = S + A$.

En outre, ce couple est explicitement donné par les formules : $S = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$.

L'unicité du couple (S, A) provient de l'unicité de la solution du système obtenu dans la partie analyse.

QUESTION DE COURS 3. — Propriétés de la trace : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ + **Corollaire** : Deux matrices semblables ont même trace + Réciproque fautive à l'aide d'un contre-exemple.

PREUVE. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

D'une part : $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$.

D'autre part : $\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{ik}$.

Conclusion : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Par ailleurs, si A et B désignent deux matrices semblables. Il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$. Il s'ensuit que : $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$.

Conclusion : deux matrices semblables ont même trace.

La réciproque de l'implication précédente est fautive. Il ne suffit pas que deux matrices aient même trace pour qu'elles soient semblables : les matrices I_2 et $2E_{11}$ ont même trace, mais ne sont pas semblables (la matrice identité I_2 n'étant semblable qu'à elle-même).

*. Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, c-à-d : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

QUESTION DE COURS 4. — **Propriété (linéarité de la trace) :** $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$

Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A + \mu B)_{ii} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^n b_{ii} = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$$

Conclusion. $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$

QUESTION DE COURS 5. — **Propriété :** $S_N(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

Soient A et B dans $S_N(\mathbb{K})$, λ et μ deux scalaires. On a :

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$$

la première égalité provenant de la linéarité du passage à la transposée, et la seconde de l'hypothèse de symétrie faite sur A et B . On en déduit que $\lambda A + \mu B$ est symétrique, d'où la conclusion.

QUESTION DE COURS 6. — **Propriété :** $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$

Soient $2n$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$. Posons $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $P = AB$.

► Commençons par montrer que P est diagonale : soient i et h deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$.

$$\text{Alors : } P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} = \lambda_i \times \underbrace{b_{ij}}_{=0 \text{ (} B \text{ diag)}} = 0.$$

Ainsi : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, [i \neq j] \implies [P_{ij} = 0]$. D'où : P est diagonale.

► Déterminons à présent les coefficients diagonaux de P . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$P_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = a_{ii} b_{ii} = \lambda_i \mu_i$$

Ainsi : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{ii} = \lambda_i \mu_i$.

Conclusion. P est diagonale et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{ii} = \lambda_i \mu_i$. Ainsi :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$$

QUESTION DE COURS 7. — **Propriété :** le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{K})$. Par définition (de $T_n^+(\mathbb{K})$), on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \implies (a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0) \quad (\spadesuit)$$

Notons $P = A \times B$. Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i > j$ ().

$$\text{On a : } P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Dans la somme : $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj}$ on a $k < i$, donc $a_{ik} = 0$ (d'après ()). Ainsi : $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} = 0$.

Dans la somme : $\sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}$ on a $k \geq i$ d'où $k > j$ (d'après ()), donc $b_{kj} = 0$ (d'après ()). Ainsi : $\sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} = 0$.

Finalement $P_{ij} = 0$. En résumé, on a établi que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \implies (P_{ij} = 0)$; donc $P \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Conclusion : $\forall (A, B) \in T_n^+(\mathbb{K})^2, A \times B \in T_n^+(\mathbb{K})$ (la matrice produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure)

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Donner des exemples de matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

- ➔ $AB \neq BA$
- ➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$
- ➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales
- ➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

EXERCICE 2. — Pour tout entier naturel N , calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3. — Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout entier naturel N .

EXERCICE 4. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE 5. — (**Commutant d'une matrice**). Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\text{COM}(A)$ le commutant de la matrice A , c'est à dire l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A :

$$\text{COM}(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$$

Montrer que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Donner des exemples de matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

➔ $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{On a : } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{On a : } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{On a : } AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

➔ $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{On a : } A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})} \text{ mais } A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

EXERCICE 2. — Pour tout entier naturel N , calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observons que : $A = 2I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➤ On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{M_3(\mathbb{K})}$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq 3) \implies (B^k = 0_{M_3(\mathbb{K})})$ (♠).[†]

➤ On a : $(2I_3) \times B = B \times (2I_3)$ (♣). En effet, toute matrice de la forme (λI_3) [‡] commute avec toute matrice de $M_3(\mathbb{K})$.

➤ Soit N un entier naturel. On a : $A^N = (2I_3 + B)^N$. Grâce à (♣), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$A^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k$$

D'après (♠), on a encore : $A^N = \sum_{k=0}^2 \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k = 2^N \underbrace{B^0}_{=I_3} + N2^{N-1}B + \frac{N(N-1)}{2} 2^{N-2}B^2$

Explicitement :

$$A^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & N2^{N-1} & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N(N-1)2^{N-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où finalement : $\forall N \in \mathbb{N}, A^N = \begin{pmatrix} 2^N & N2^{N-1} & N(N+3)2^{N-3} \\ 0 & 2^N & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}$

[†]. Ainsi la matrice B est nilpotente.

[‡]. Une telle matrice est appelée matrice **scalaire**.

EXERCICE 3. — Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout entier naturel N .

Supposons A et B semblables : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AP$.

Pour tout entier naturel N , notons $\mathcal{P}(N)$ l'assertion : " $B^N = P^{-1}A^N P$ ".

L'initialisation (pour $N = 0$) est immédiate puisque $B^0 = I_n$ et $P^{-1}A^0 P = P^{-1}I_n P = P^{-1}P = I_n$.

Passons à l'hérédité : supposons $\mathcal{P}(N)$ vraie pour un certain entier naturel N .

Alors, en utilisant notamment l'hypothèse de récurrence et l'associativité du produit matriciel :

$$B^{N+1} = B^N \times B = (P^{-1}A^N P) (P^{-1}AP) = P^{-1}A^N (PP^{-1}) AP = P^{-1}A^{N+1}P$$

Ainsi : $B^{N+1} = P^{-1}A^{N+1}P$. Ce qui assure que $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. Si A et B (dans $M_n(\mathbb{K})$) sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout $N \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$[PX = B] \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 & (L_2) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b_3 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \leftarrow (L_1) + 2(L_2) \\ x_2 + x_3 = b_1 + 2b_3 & (L_3) \leftarrow (L_1) + 2(L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ 2x_3 = 2b_2 - 2b_3 & (L_3) \leftarrow (L_2) - (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 = 2b_1 + 2b_3 & (L_1) \\ x_2 = b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_1 + b_3 & (L_1) \\ x_2 = b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases}$$

Conclusion. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5. — (**Commutant d'une matrice**). Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\text{COM}(A)$ le commutant de la matrice A , c'est à dire l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A :

$$\text{COM}(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$$

Montrer que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

Il suffit de vérifier les quatre axiomes assurant que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

Les axiomes SG1 ($\text{COM}(A) \subset M_n(\mathbb{K})$) et SG2 ($0_{M_n(\mathbb{K})} \in \text{COM}(A)$) sont évidemment réalisés.

Il est à peine moins évident de vérifier que $\text{COM}(A)$ est stable par somme (SG3) :

Si M et $N \in \text{COM}(A)$, alors : $(M + N)A = MA + NA = AM + AN = A(M + N)$. D'où : $(M + N) \in \text{COM}(A)$

Enfin, $\text{COM}(A)$ est stable par passage à l'opposé (SG4) :

Si $M \in \text{COM}(A)$, alors : $(-M)A = -(MA) = -(AM) = A \times (-M)$. D'où : $(-M) \in \text{COM}(A)$

Conclusion. $\text{COM}(A)$ est une partie de $M_n(\mathbb{K})$, contenant $0_{M_n(\mathbb{K})}$ (l'élément neutre pour l'addition dans $M_n(\mathbb{K})$), stable par somme et par passage à l'opposé. Il s'ensuit que $(\text{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), +)$.

En particulier, $(\text{COM}(A), +)$ est un groupe (abélien).