MPSI – Colle 14 (20 au 24 janvier 2025) : Calcul matriciel

Chapitre 13 : Calcul matriciel

NB : n et p désignent deux entiers naturels non nuls ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Généralités sur les matrices

Définition de **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ sera notée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$. Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Exemples et cas particuliers : la **matrice nulle** de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls ; pour éviter les confusions, elle est notée $0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$. Une **matrice colonne** (*resp.* **ligne**) est un élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (*resp.* $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).

2 – Opérations sur les matrices

➢ Somme de deux matrices de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Propriétés de la somme : pour A, B et C quelconques dans $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$:

1) $A + B = B + A$; 2) $A + 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})} = A$; 3) $A + (B + C) = (A + B) + C$

Remarque : 2) $0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$ est l'**élément neutre** pour la somme dans $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

➢ Multiplication par un scalaire dans $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Propriétés : pour A et B dans $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, pour λ et μ quelconques dans $\mathbb{K}$:

1) $1A = A$; 2) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$; 3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$; 4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Pour tout $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice opposée notée $(-A)$ est la matrice $(-1) A$. Sans surprise : $A + (-A) = 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$.

Propriété : $(\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

➢ Produit matriciel. **Définition** : le **produit** de deux matrices $A \times B$ est défini si le nombres de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Explicitement :

$$\forall\, A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall\, B \in \mathrm{M}_{pm}(\mathbb{K}),\ \forall\, i \in [\![1; n]\!],\ \forall\, j \in [\![1; m]\!],$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

La matrice AB hérite du nombre de lignes de A et du nombre de colonnes de B. Son coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est le "produit" de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B.

Remarques : le produit matriciel n'est pas commutatif (pire : le produit AB peut être défini sans que le produit BA le soit). En outre, on peut avoir $AB = 0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$ sans que A ou B soit nulle (encore pire : on peut avoir $AB = 0$ mais $BA \neq 0$).

Propriétés du produit : sous réserve que les produits suivants soient définis, on a : 1) Associativité : $A(BC) = (AB) C$ 2) Distributivité par rapport à la somme : $A(B + C) = AB + AC$

➢ Transposée d'une matrice $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Définition et propriétés (linéarité, transposée d'un produit).

3 – Matrices carrées

Définition : une matrice est **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes ("$n = p$"). L'espace des matrices carrées à n lignes et n colonnes (de taille n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (plutôt que $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

Définition : la matrice **identité** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n est la matrice n'ayant que des 1 sur sa diagonale, des 0 partout ailleurs. Plus précisément :

$$\forall\, (i, j) \in ([\![1; n]\!])^2,\ (I_n)_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Notation : $\forall\, (i, j) \in ([\![1; n]\!])^2,\ (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

Propriété : $\forall\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AI_n = I_n A = A$. En particulier, la matrice I_n et plus généralement la matrice λI_n ($\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété : $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif et non intègre pour $n \geqslant 2$).

Définitions de matrice **diagonale**, **triangulaire supérieure**, **triangulaire inférieure**.

Notations : $D_n(K)$, $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ désignent les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

Propriété : $(D_n(\mathbb{K}), +, \times)$, $(T_n^+(\mathbb{K}), +, \times)$ et $(T_n^-(\mathbb{K}), +, \times)$ sont des sous-anneaux de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. En outre, l'anneau $(D_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est commutatif ; et pour $n \geqslant 2$, aucun de ces anneaux n'est intègre.

4 – Puissances d'une matrice carrée

Formule du binôme de Newton dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{N-k} B^k$$

Application pratique importante : calcul des puissances d'une matrice A se décomposant comme : $A = \lambda I_n + N$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et N matrice nilpotente.

5 – Matrices inversibles

Généralités, cas particulier des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, matrices inversibles et systèmes linéaires.

6 – Matrices semblables

Définition. La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables.

Trace d'une matrice carrée. Propriétés : linéarité et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

La trace et le déterminant sont des invariants de similitude (*à ce stade, le déterminant n'est connu que pour les matrices 2×2*).

Questions de cours

- Connaître des exemples de matrices A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :
  - $AB \neq BA$
  - $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$
  - $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales
  - $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$
- **Propriété** : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. *On montrera ici que :* $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A \times I_n = A$ *et on pourra admettre* $I_n \times A = A$.
- **Propriété (linéarité de la trace)** : $\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$
- **Théorème** : toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- **Propriété** : $\mathrm{S}_N(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
- **Propriété** : le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, et plus précisément :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

- **Propriété** : Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. **Corollaire** : deux matrices semblables ont même trace.
- **Propriété** : le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.