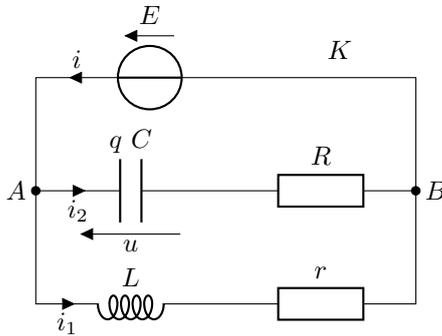


CB1 du 18/01 : Physique (4h)

Solution de l'exercice 1 : Circuits alimentés en parallèle

Q.1 Soit le circuit :



Par continuité on a : $u(t = 0^+) = 0$ et $i_1(t = 0^+) = 0$ car le condensateur et la bobine sont déchargés.

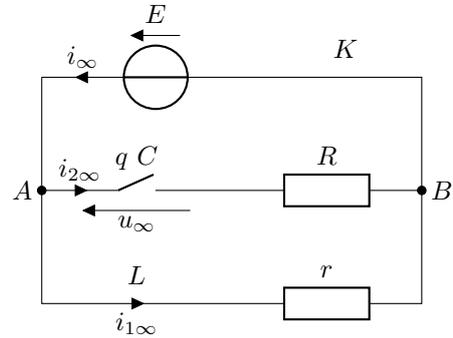
Loi des mailles : $E = u(t = 0^+) + Ri_2(t = 0^+)$

$$\implies i_2(t = 0^+) = \frac{E}{R}$$

Loi des nœuds : $i(t = 0^+) = i_1(t = 0^+) + i_2(t = 0^+)$

$$\implies i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$$

En régime permanent on a le circuit équivalent suivant :



On a $i_{2\infty} = 0$ et la tension aux bornes de la bobines nulle.

$$\text{Loi des mailles : } E = ri_{1\infty} \implies i_{1\infty} = \frac{E}{r} \text{ soit } i_{\infty} = \frac{E}{r}$$

Q.2 Pour $i_1(t)$: loi des mailles $E = L \frac{di_1}{dt} + ri_1(t)$ une EDL₁ sous forme canonique $\frac{di_1}{dt} + \frac{r}{L}i_1(t) = \frac{E}{L}$

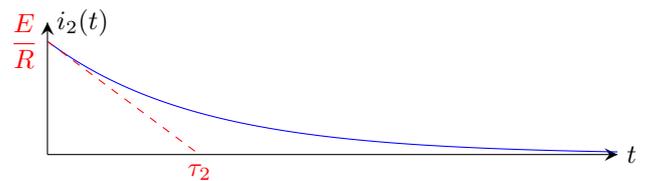
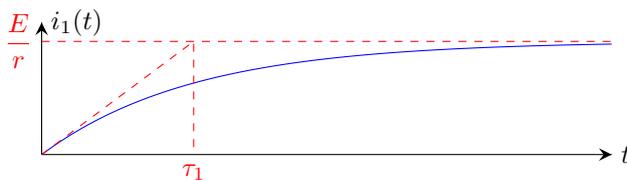
On cherche $i_1(t) = i_{h1}(t) + i_{p1}$ avec $i_{p1} = C^{te}$ on trouve $i_{p1} = \frac{E}{r}$ et $i_{h1}(t) = A_1 e^{-t/\tau_1}$ avec $\tau_1 = \frac{L}{r}$ et A_1 une constante d'intégration.

On utilise la CI : $i_1(t = 0^+) = 0 \iff A + \frac{E}{r} = 0 \iff A = -\frac{E}{r}$ soit $i_1(t) = \frac{E}{r} (1 - e^{-t/\tau_1})$

Pour $i_2(t)$: loi des mailles $E = u(t) + Ri_2(t)$ on dérive $0 = \frac{i_2}{C} + R \frac{di_2}{dt}$ une EDL₁ sous forme canonique $\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2(t)}{RC} = 0$

On cherche $i_2(t) = A_2 e^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = RC$ et A_2 une constante d'intégration.

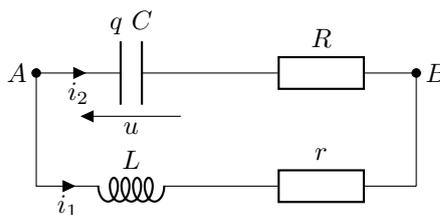
On utilise la CI : $i_2(t = 0^+) = \frac{E}{R} \iff A = \frac{E}{R}$ soit $i_2(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau_2}$



Q.3 On applique la loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{r} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{E}{R} e^{-t/\tau_2}$

Si $R = r$ et $\frac{L}{C} = R^2$ alors $\tau_1 = \tau_2$ et $i(t) = \frac{E}{R} = C^{te}$

Q.4 Après ouverture de l'interrupteur K le circuit devient :



En appliquant la loi des mailles et en faisant attention aux conventions on obtient : $u(t) + Ri_2(t) - L \frac{di_1}{dt} - ri_1(t) = 0$

Comme on a une seule maille la loi des nœuds impose : $i_1(t) = -i_2(t)$ et en utilisant $i_2(t) = C \frac{du}{dt}$:

$$u(t) + RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + rC \frac{du}{dt} = 0 \iff q(t) + (R+r)C \frac{dq}{dt} + LC \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

car $q(t) = Cu(t)$. On a également $r = R$ et $\frac{L}{C} = R^2$ on a : $q(t) + 2RC \frac{dq}{dt} + LC \frac{d^2q}{dt^2} = 0$ EDL₂ sous forme canonique

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{2R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0} \iff \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2R}{L} \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Q.5 Par continuité avec le régime permanent précédemment établi on a : $u(t = 0^+) = E$ et $i_1(t = 0^+) = \frac{E}{r} = \frac{E}{R}$

or $q = Cu$ et $i_2 = -i_1$ d'où : $q(t = 0^+) = CE$ et $i_2(t = 0^+) = -\frac{E}{R}$

Q.6 Comme $i_2 = C \frac{du}{dt}$ et $u = \frac{q}{C}$ on a $i_2 = \frac{dq}{dt}$, on cherche donc $q(t)$ pour ensuite dériver :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{2}$$

l'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \iff (r + \omega_0)^2$ de racine double : $r_0 = -\omega_0$

La solution homogène de cette EDL₂ se met sous la forme : $q(t) = e^{-\omega_0 t} (At + B)$

d'où $\frac{dq}{dt}(t) = -\omega_0 e^{-\omega_0 t} (At + B) + A e^{-\omega_0 t}$

En utilisant les conditions initiales : $\begin{cases} q(t = 0^+) = CE \\ \frac{dq}{dt}(t = 0^+) = -\frac{E}{R} \end{cases} \iff \begin{cases} B = CE \\ -\omega_0 CE + A = -\frac{E}{R} \end{cases} \iff \begin{cases} B = CE \\ A = E \frac{C}{L} - \frac{E}{R} = 0 \end{cases}$

$$q(t) = CE e^{-\omega_0 t} \quad \boxed{i_2(t) = -\frac{E}{R} e^{-\omega_0 t}}$$

Q.7 Méthode 1 : soit $P_J = 2Ri_2^2(t)$ on intègre entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} 2Ri_2^2(t) dt = \int_0^{+\infty} 2R \left(\frac{E}{R}\right)^2 e^{-2\omega_0 t} dt = 2 \frac{E^2}{R} \left[\frac{1}{-2\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \right]_0^{+\infty} dt = \frac{E^2}{R\omega_0} = CE^2$$

Méthode 2 : loi des mailles : $u + Ri_2 - L \frac{di_1}{dt} - Ri_1 = 0$ avec $i_1 = -i_2 \implies u + 2Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0$

On multiplie par i_2 pour obtenir un bilan de puissance : $u(t) \times i_2(t) + 2Ri_2^2(t) + Li_2(t) \frac{di_2}{dt} = 0$

avec $i_2(t) = C \frac{du}{dt}$ on a $Cu(t) \times \frac{du}{dt} + 2Ri_2^2(t) + Li_2(t) \frac{di_2}{dt} = 0$

On intègre maintenant entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \left(Cu \frac{du}{dt} + Li_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt + \mathcal{E}_J = 0 \iff \mathcal{E}_J = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} C \frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2} L \frac{di_2^2}{dt} \right) dt = - \left[\frac{1}{2} Cu^2(t) + \frac{1}{2} Li_2^2(t) \right]_0^{+\infty}$$

$$\mathcal{E}_J = - \left(0 - \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R^2} \right) \iff \boxed{\mathcal{E}_J = CE^2} \quad \text{avec} \quad C = \frac{L}{R^2}$$

Solution de l'exercice 2 : Filtre linéaire d'ordre 2

Q.1 Schéma électrique équivalent en BF :

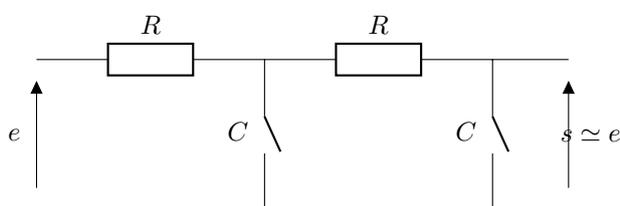
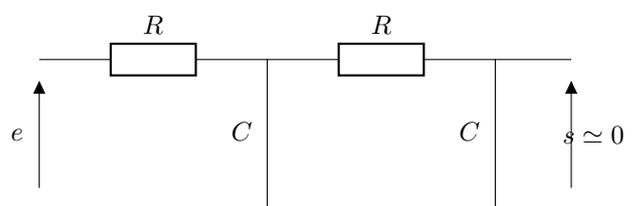
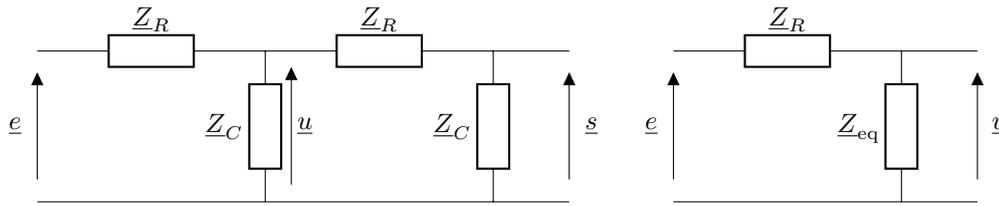


Schéma électrique équivalent en HF :



Conclusion : C'est un filtre pass-bas.

Q.2 Méthode : Calcul en 2 temps en utilisant 2 diviseurs de tension en RSF et une tension intermédiaire $\underline{u}(t)$.



avec $\frac{1}{Z_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = jC\omega + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$

1^{er} diviseur de tension : $\underline{s}(t) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{u}(t)$

2^e diviseur de tension : $\underline{u}(t) = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{Z_{eq}}} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC + \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}} \underline{e}(t)$

soit $\underline{s}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \times \frac{1}{1 + j\omega RC + \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}} \underline{e}(t)$

$\Leftrightarrow \underline{s}(t) = \frac{1}{1 + 2j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC} \underline{e}(t) \Leftrightarrow \underline{s}(t) = \frac{1}{1 - (\omega RC)^2 + 3j\omega RC} \underline{e}(t)$

Par définition : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 3j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ la pulsation propre du filtre avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

on obtient : $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + 3jx}$

Q.3 On en déduit alors : $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}}$

et $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arg(1 - x^2 + 3jx) = \arg(1 - x^2 - 3jx) = \arg\left[-3j\left(x + \frac{j}{3}(1 - x^2)\right)\right]$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \arg(-3j) + \arg\left(x + \frac{j}{3}(1 - x^2)\right) \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - x^2}{3x}\right)$

Q.4 Tableau des équivalents de $\underline{H}(jx)$ qui donne les équations des asymptotes :

	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q}$	$G(x)$	$G_{dB} = 20 \log(G)$	$\varphi(x)$
BF $x \ll 1$	$\simeq \frac{1}{1} = 1$	1	0	0
HF $x \gg 1$	$\simeq \frac{1}{-x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	$\simeq -40 \log(x)$	$\simeq -\pi$
$x = 1$	$= \frac{1}{3j}$	$\frac{1}{3}$	$-20 \log(3) \simeq -9,5 \text{ dB}$	$-\frac{\pi}{2}$

En BF : La droite d'équation $G_{dB} = 0$ est asymptote et la droite d'équation $\varphi = 0$ est asymptote.

En HF : La droite d'équation $G_{dB} = -40 \log(x)$ est asymptote et la droite d'équation $\varphi = -\pi$ est asymptote.

Q.5 Sachant que $\varphi(x = 1) = \varphi(\omega = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}$ rad, on relève graphiquement : $\omega_0 \simeq 1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q.6 Par linéarité du filtre étudié, le signal de sortie s'exprime selon :

$s(t) = e_0 G\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t + \varphi\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right) + e_0 G(\omega_0) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega_0)\right) + e_0 G(2\omega_0) \cos\left(2\omega_0 t + \varphi(2\omega_0)\right)$

où les valeurs de gain et déphasage sont obtenues graphiquement sur les diagrammes de Bode.

Relevés pour $\omega = \frac{\omega_0}{2} = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: $\left| \begin{array}{l} G_{dB}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \simeq -5 \text{ dB} \Rightarrow G\left(\frac{\omega_0}{2}\right) = 10^{-5/20} \simeq 0,56 \\ \varphi\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \simeq -0,7 \text{ rad} \end{array} \right.$

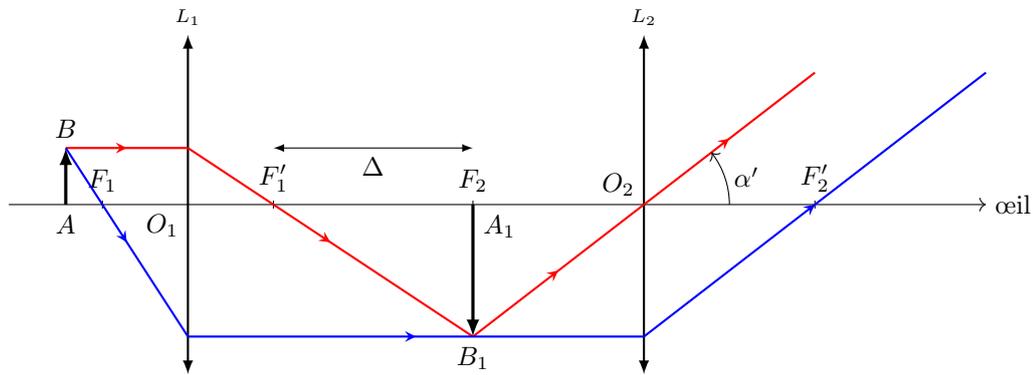
$$\begin{aligned} \text{Relevés pour } \omega = \omega_0 = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} : & \left\{ \begin{array}{l} G_{\text{dB}}(\omega_0) \simeq -10 \text{ dB} \implies G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0,32 \\ \varphi(\omega_0) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \text{Relevés pour } \omega = 2\omega_0 = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} : & \left\{ \begin{array}{l} G_{\text{dB}}(2\omega_0) \simeq -18 \text{ dB} \implies G(2\omega_0) = 10^{-18/20} \simeq 0,13 \\ \varphi(2\omega_0) \simeq -2 \text{ rad} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Bilan : } s(t) = 0,56e_0 G \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t - 0,7\right) + 0,32e_0 \cos(\omega_0 t) + 0,13e_0 \cos(2\omega_0 t - 2)$$

Solution de l'exercice 3 : Des oiseaux haut en couleur

Q.1 Un œil observe sans fatigue un objet situé à l'infini. On souhaite donc ici l'image finale A_2 en sortie de L_2 doit se situer à l'infini. Alors l'image intermédiaire $A_1 B_1$ doit se situer dans le plan focal objet de la seconde lentille. Il faut notamment que $A_1 = F_2$.

Q.2 Schéma optique des rayons lumineux :



Q.3 En utilisant la définition du grandissement et le théorème de Thalès pour le rayon rouge : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'_1 A_1}}{\overline{F'_1 O_1}}$

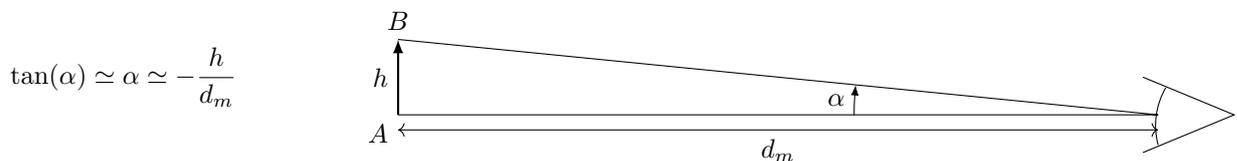
$$\text{soit } \gamma_1 = \frac{\overline{F'_1 F_2}}{-\overline{O_1 F'_1}} \iff \gamma_1 = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

Q.4 Diamètre angulaire d'observation : $\tan(\alpha') \simeq \alpha'$ dans les conditions de Gauss

$$\text{soit } \alpha' \simeq \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_2 A_1}} \iff \alpha' \simeq \frac{\gamma_1 \overline{AB}}{\overline{O_2 F_2}} \iff \alpha' \simeq \frac{-\Delta h}{f'_1 (-f'_2)} \iff \alpha' \simeq \frac{\Delta h}{f'_1 f'_2}$$

Q.5 $d_m \simeq 25 \text{ cm}$ correspond au *punctum proximum*, point le plus proche auquel l'œil peut voir net. d_M correspond au *punctum remotum*, point le plus éloigné auquel l'œil peu voir net, qui se situe à l'infini pour un œil sans défaut.

Q.6 Au *punctum proximum*, l'objet est vu sous le plus grand diamètre angulaire. Dans cette configuration, on a :



$$\tan(\alpha) \simeq \alpha \simeq -\frac{h}{d_m}$$

Q.7 Grossissement commercial du microscope : $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{h\Delta}{f'_1 f'_2} \times \frac{d_m}{-h} \simeq -\frac{d_m \Delta}{f'_1 f'_2}$ AN : $G_c \simeq -167$

Le signe moins est là pour montrer que α' et α sont orientés dans des sens opposés. L'image est vue renversée par l'œil.

Q.8 La résolution angulaire de l'œil est $\varepsilon = 1'$. La distance angulaire minimale vue à travers le microscope est donc : $\alpha_m = G_c \times \varepsilon = 167' = 2,8^\circ$.

Q.9 En mesurant sur la photo 3 du sujet, on peut estimer la distance entre deux barbules à environ $30 \mu\text{m}$.

Q.10 Pour $d_m = 25 \text{ cm}$, cela correspond à un diamètre angulaire à l'œil nu de : $\alpha \simeq \frac{30 \mu\text{m}}{25 \text{ cm}} = 1,2 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,4'$. Ceci est en dessous de la limite de résolution angulaire $\varepsilon = 1'$.

En revanche, avec un grossissement $G_c = 167$, le diamètre angulaire sera $\alpha' \simeq 20 \text{ mrad} \simeq 69'$: on peut distinguer les barbules au microscope.

Q.11 Lors du passage de l'onde lumineuse pour les microgranules, il y a diffusion Rayleigh de la lumière avec une

puissance moyenne diffusée à travers une sphère :

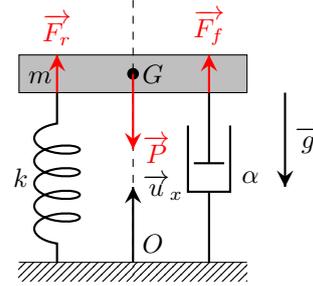
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \alpha \omega^4$$

Lorsqu'on éclaire avec de la lumière blanche, le bleu (avec $\omega_{\text{bleu}} \sim 2 \times \omega_{\text{rouge}}$) est alors environ $2^4 = 16$ fois plus diffusé que le rouge ! Ce sera donc le bleu et le violet qui seront les couleurs dominantes observées en diffusion. Les autres radiations de plus faible pulsation / fréquence qui sont moins diffusées, sont principalement transmises comme indiqué sur la figure 5 de l'énoncé.

Q.12 On a donc une meilleure transmission des ondes de faibles fréquences (rouge, orange, jaune...), et une perte de puissance des radiations de hautes fréquences (bleu, violet) qui sont diffusées sur les côtés. On peut donc dire que cette partie du plumage agit comme un filtre passe-bas en transmission.

Solution de l'exercice 4 : Étude des oscillations du Millennium Bridge

- Q.1 Système :** $\{G(m)\}$ centre de masse l'oscillateur.
Référentiel : Le référentiel terrestre supposé galiléen.
Repérage : cartésien unidimensionnel selon l'axe (Ox)
Bilan des forces :
- le poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$;
 - la force de rappel : $\vec{F}_r = -k(x(t) - l_0)\vec{u}_x$;
 - force de frottements : $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$ avec $\alpha > 0$;



Principe fondamental de la dynamique (PFD) : $\vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_r = m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}}$

Condition d'équilibre mécanique : $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{0} = \vec{0}$ puisque $x_{\text{eq}} = C^{te}$

Soit selon (Ox) : $-mg - k(x_{\text{eq}} - l_0) = 0$ (1) d'où la position d'équilibre $x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}$

Q.2 Projection du PFD selon (Ox) : $-mg - k(x(t) - l_0) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$ (2)

On effectue (2) - (1) : $-k(x - \text{eq}) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$

On pose ensuite $X(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$, $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$:

$$\underbrace{\ddot{X}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{X}(t) + \frac{k}{m}X(t)}_{\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0} = 0 \quad \text{on pose alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \end{array} \right. \text{coeff d'amortissement tel que } [\xi] = 1$$

Q.3 Dans le cas où $\xi = 0$, il n'y a pas de frottements et l'EDL₂ se réécrit : $\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0$ caractéristique de l'oscillateur harmonique et de solution

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \dot{X}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

puis on applique les conditions initiales :

$$\begin{cases} X(t=0) = X_0 \\ \dot{X}(t=0) = V_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \times 1 + B \times 0 = X_0 \\ -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = V_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = X_0 \\ B = \frac{V_0}{\omega_0} \end{cases} \text{ soit } X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

On retrouve le modèle de l'oscillateur harmonique, sans frottements caractérisé par une conservation de l'énergie mécanique (amplitude des oscillations constante).

Q.4 Dans le cas où $\xi < 1$, on pose l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{de discriminant} \quad \Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Avec $\xi < 1$ on a nécessairement $\Delta < 0 \Rightarrow$ régime transitoire pseudo-périodique.

Les solutions de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées telles que :

$$r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{1}{\xi\omega_0} \text{ temps caractéristique du régime transitoire} \\ \omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \text{ pseudo pulsation} \end{array} \right.$$

On admet la solution de l'équation différentielle homogène : $X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t))$

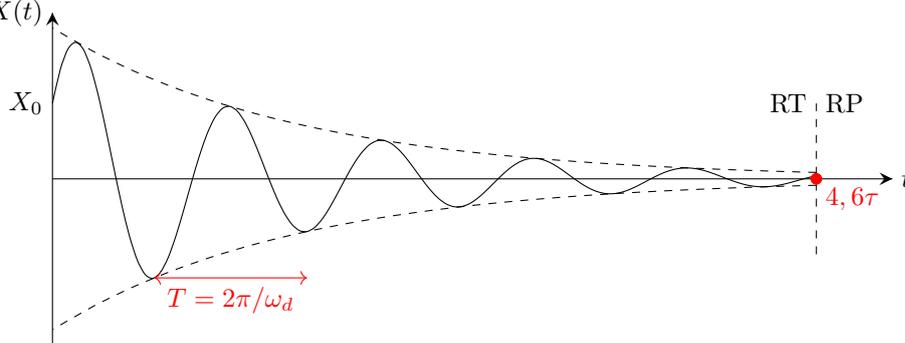
avec $\dot{X}(t) = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t} (A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)) + e^{-\xi\omega_0 t} (-A_1\omega \sin(\omega t) + B_1\omega \cos(\omega t))$

on applique les conditions initiales du problème :

$$\begin{cases} X(t=0) = X_0 \\ \dot{X}(t=0) = V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 \times 1 + B_1 \times 0 = X_0 \\ -\xi\omega_0(A_1 + 0) + 1 \times (0 + B_1\omega) = V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = x_0 \\ B_1 = \frac{1}{\omega} (V_0 + X_0\xi\omega_0) \end{cases}$$

Bilan : $X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(X_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{(V_0 + X_0 \xi \omega_0)}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right)$

Allure de $X(t)$:



Q.5 L'influence du vent est modélisée par une force $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \vec{u}_x$ ($\beta > 0$) que l'on peut ajouter au BDF tel qu'au final on ait l'EDL₂ :

$$\ddot{X}(t) + \frac{\alpha - \beta}{m} \dot{X}(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0$$

Interprétation : si $\beta > \alpha$ alors les racines de $r_{1,2}$ de l'équation caractéristique seront à partie réelle positive, dans ce cas l'amplitude diverge et on a un risque de destruction.

Q.6 L'action mécanique des piétons est modélisée par une force $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1(t)$ que l'on peut ajouter au BDF tel qu'on ait l'EDL₂ vérifiée par $x(t) : -mg - k(x(t) - l_0) - \alpha \dot{x} - F_0 - F_1 \cos(2\pi ft) = m\ddot{x}$ (3)

On effectue alors (3) - (1) : $-k(x - x_{eq}) - \alpha \dot{x} - F_0 - F_1 \cos(2\pi ft) = m\ddot{x}$

Soit : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X(t) + \frac{F_0}{m} = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$ on pose alors $Y(t) = X(t) - \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

$$\ddot{Y}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{Y}(t) + \omega_0^2 Y(t) = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

Q.7 Cadre du régime sinusoïdal forcé : la réponse en RSF du système à une excitation périodique est de la forme $Y(t) = Y_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation de forçage des piétons.

Q.8 Au signal réel $Y(t)$ est associé le signal complexe $\underline{Y}(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ tel que $Y(t) = \Re e(\underline{Y}(t))$

On note alors $\underline{Y}_m = Y_m(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ l'amplitude complexe de la réponse en RSF. On réécrit l'EDL₂ en notations complexes :

$$\ddot{\underline{Y}} + 2\xi\omega_0 \dot{\underline{Y}} + \omega_0^2 \underline{Y} = -\frac{F_1}{m} e^{j\omega t} \iff (j\omega)^2 \underline{Y} + 2\xi\omega_0 (j\omega) \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = -\frac{F_1}{m} e^{j\omega t}$$

$$\iff \underline{Y}(t) (\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega) = -\frac{F_1}{m} e^{j\omega t} \iff \underline{Y}_m e^{j\omega t} (\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega) = -\frac{F_1}{m} e^{j\omega t}$$

L'amplitude complexe de la réponse :

$$\underline{Y}_m(j\omega) = \frac{-F_1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_0\xi}$$

Q.9 Par définition de la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{Y_m e^{j\omega t}}{-\frac{F_1}{m} e^{j\omega t}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega}$

soit avec $x = \frac{\omega}{\omega_0} \implies \underline{H}(jx) = \frac{1/\omega_0^2}{1 - x^2 + j2\xi x}$

Q.10 À la résonance, l'amplitude réelle de la réponse passe par un maximum, on définit alors le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$

$$G(x) = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}} > 0$$

Le gain $G(x)$ passe par un maximum si et seulement si la fonction $g(x) = (1 - x^2)^2 + 4\xi^2 x^2$ passe par un minimum. On résout alors $g'(x_r) = 0$:

$$2 \times (-2x_r) \times (1 - x_r^2) + 4\xi^2 \times 2x_r = 0 \iff 2x_r(4\xi^2 - 2(1 - x_r^2)) = 0 \iff 4\xi^2 - 2 + 2x_r^2 = 0 \quad \text{car } x_r > 0$$

Il faut nécessairement que $x_r^2 > 0$ soit $x_r^2 = 1 - 2\xi^2 > 0$ d'où $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Q.11 Dans le cas limite où $\xi^2 \ll 1$, on réécrit le gain à la résonance : $G(x_r) = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - (1 - 2\xi^2))^2 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}}$
 soit : $G(x_r) = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \frac{1}{2\omega_0^2 \xi} (1 - \xi^4)^{-1/2} \simeq \frac{1}{\omega_0 \sqrt{4\xi^2}}$ à l'aide d'un DL₁ en ξ^2 car $\xi^2 \ll 1$ on obtient :

$$G(x_r) \simeq \frac{1}{2\xi\omega_0^2}$$

Q.12 L'analyse de la courbe de réponse fait apparaître une résonance à la pulsation : $\omega_r \simeq 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi que la valeur de $20 \log(\omega_0^2 G(\omega_r)) \simeq 9 \text{ dB}$ soit $\omega_0^2 G(\omega_r) \simeq 2,82$ ce qui permet d'obtenir $\xi \simeq 0,177$ compatible avec $\xi^2 \ll 1$.

Q.13 Afin d'éviter des amplitudes de mouvement de déformation trop importantes à la résonance.

Q.14 Sans rentrer dans la théorie de l'échantillonnage et du critère de Shannon, seuls les spectres 2 et 4 sont exploitables avec pour le 2^e un pic à $f_r \simeq 2 \text{ Hz}$ qui correspond à la fréquence de marche des piétons.

Q.15 La courbe 2 avec amortisseur harmonique fait apparaître une baisse d'amplitude de 8 dB à la résonance mais par contre 2 fréquences de résonance apparaissent de part et d'autre (à $8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

... **FIN** ...