

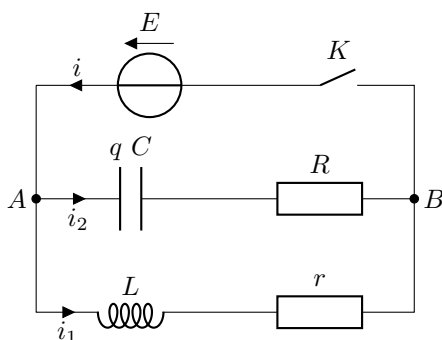
## CB1 du 18/01 : Physique (4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'aux consignes suivantes :

- Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.
- Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.
- Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).
- Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.
- La calculatrice est **autorisée**, le téléphone interdit.
- Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

### Problème 1 : Circuits alimentés en parallèle

On considère le circuit ci-dessous composé de deux branches comportant l'une, une résistance  $r$  et une inductance  $L$  et l'autre, une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ . Elles sont alimentées par un générateur de tension continue de force électromotrice  $E$  et de résistance interne négligeable.



Le condensateur et la bobine étant déchargés, on ferme à l'instant  $t = 0$  l'interrupteur  $K$ . On désignera respectivement par  $i_1$  et par  $i_2$  les intensités dans la branche contenant l'inductance et dans la branche contenant le condensateur, et par  $i$  l'intensité dans le générateur.

- Q.1** Déterminer par un raisonnement physique, les valeurs de  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i$  immédiatement après la fermeture de l'interrupteur  $K$  une fois le régime permanent établi.
- Q.2** Déterminer en fonction du temps les régimes transitoire de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  et tracer l'allure des courbes correspondantes.
- Q.3** En déduire l'expression de  $i(t)$ . Que devient ce résultat si les conditions  $R = r$  et  $\frac{L}{C} = R^2$  sont vérifiées ?

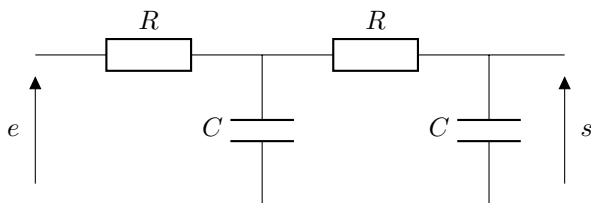
On supposera dans toute la suite que  $R = r$  et  $\frac{L}{C} = R^2$ .

On considère toujours le même circuit alimenté par le même générateur.  $K$  étant fermé, le régime permanent est établi. À un instant que l'on choisira comme nouvelle origine des temps, on ouvre l'interrupteur  $K$ .

- Q.4** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $q(t)$  la charge stockée dans le condensateur.
- Q.5** Montrer que juste après l'ouverture  $i_2(0^+) = -\frac{E}{R}$  et  $q(0^+) = CE$ .
- Q.6** Déterminer complètement l'expression de  $i_2(t)$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $C$  et  $t$ .
- Q.7** Déterminer, de deux manières différentes, l'énergie dissipée par effet Joule au bout d'un temps très long après l'ouverture de l'interrupteur  $K$ .

### Problème 2 : Filtre linéaire d'ordre 2

On se propose de réaliser le quadripôle ci-dessous en sortie ouverte constitué de deux cellules  $RC$  en cascade alimenté par un signal d'entrée  $e(t)$  sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :



**Q.1** Déterminer sans calculs la nature du filtre. On donnera la valeur du signal de sortie  $s(t)$  à basses et hautes fréquences.

**Q.2** Montrer que la fonction de transfert complexe en sortie ouverte se met sous la forme :

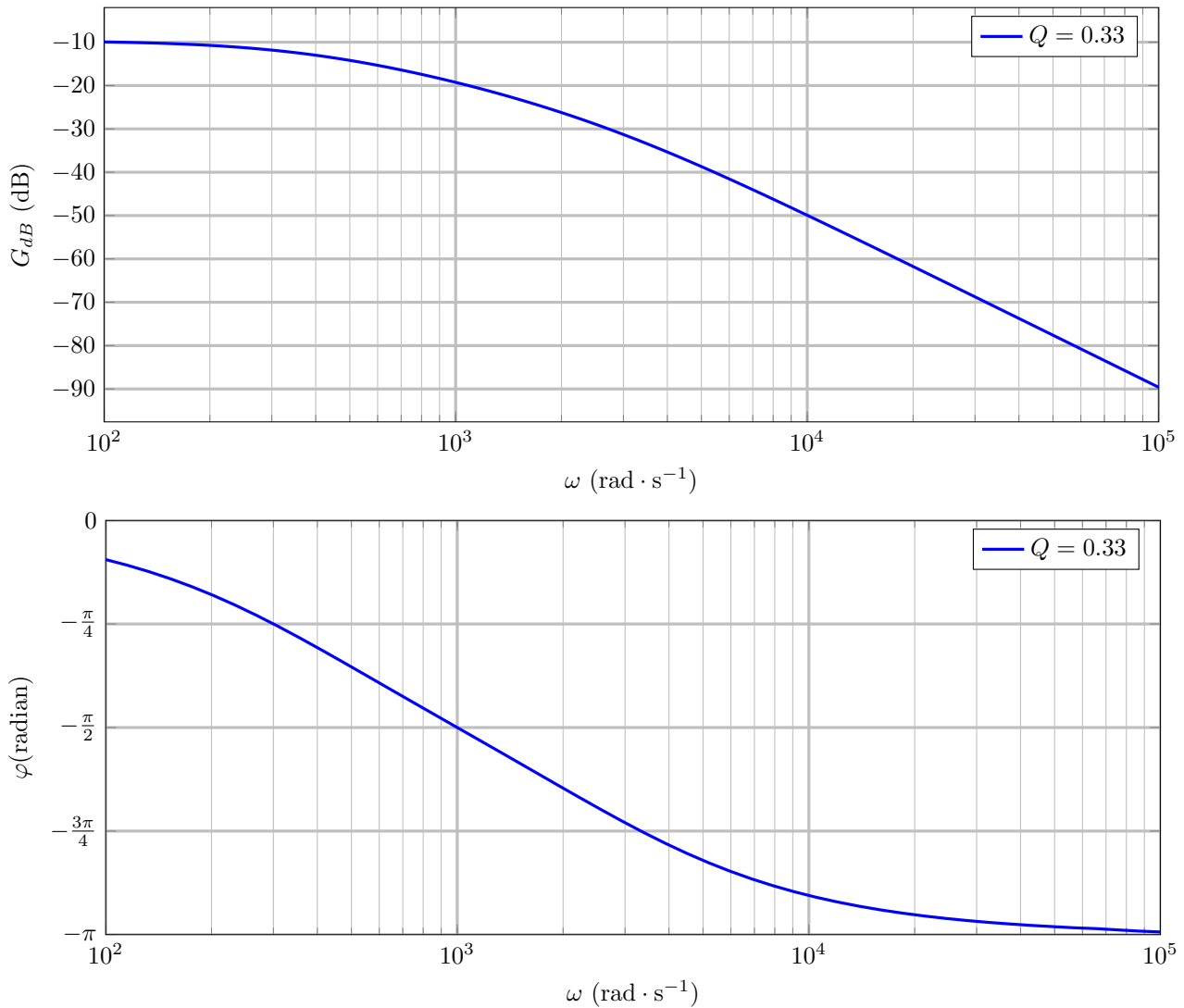
$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 3jx - x^2}$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite. Déterminer l'expression, l'unité et la signification de la constante  $\omega_0$ . En déduire l'ordre du filtre.

**Q.3** Exprimer le gain linéaire  $G(x)$  et le déphasage  $\varphi(x)$  introduit par le filtre à la pulsation réduite  $x$ .

**Q.4** Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase.

On représente les diagrammes de Bode réels du filtre étudié :



**Q.5** En exploitant les diagrammes de Bode réels du filtre étudié, déterminer en justifiant votre réponse la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  du filtre étudié.

On envoie un signal d'entrée de la forme :  $e(t) = e_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + e_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + e_0 \cos(2\omega_0 t)$

**Q.6** En exploitant soigneusement les diagrammes de Bode fournis, déterminer l'expression numérique approchée du signal de sortie  $s(t)$ .

### Problème 3 : Des oiseaux haut en couleur

L'extraordinaire diversité des motifs colorés des oiseaux résulte de phénomènes physiques tels que l'absorption de la lumière, la diffusion, les interférences ou encore la diffraction.

Certains motifs peuvent être expliqués soit par une répartition organisée du plumage, on parle alors de couleurs structurales, soit par la présence de pigments dans le plumage, on parle alors de couleurs pigmentaires. Si le jaune du canari est par exemple pigmentaire, le bleu de la perruche est lui structural.

Certains oiseaux bénéficient des deux types de colorations comme le perroquet Ara qui présente ainsi un plumage très coloré (**photo 1**).



**Photo 1** - Perroquets Ara (rouge vert bleu à gauche, bleu jaune à droite)

Pour ce **problème 3**, les intervalles de longueurs d'onde de quelques couleurs sont fournis dans le tableau ci-dessous :

Couleurs	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet
$\lambda$ en nm	620-780	590-620	580-590	500-580	450-500	380-450

On donne, pour une lentille conjuguant un objet  $A$  et une image  $A'$ , la relation de conjugaison avec origine aux foyers  $F$  et  $F'$  :

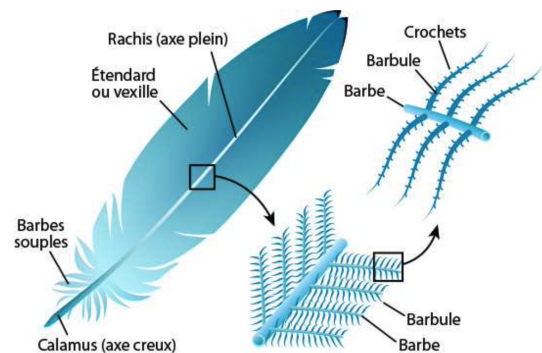
$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

À l'origine, la couleur des perruches à l'état sauvage est verte, mais la captivité chez cet oiseau, souvent élevé en nombre, a permis l'émergence de nouvelles couleurs, comme le bleu (**photo 2**). C'est notamment l'appauvrissement en pigments jaunes dans son plumage qui est indirectement responsable de cette coloration si particulière et rare dans le domaine animal.

De façon schématique, une plume est constituée essentiellement d'un rachis sur lequel pousse les barbes sur lesquelles naissent des barbules (**figure 1**). Le long des barbules prennent naissance à leur tour des crochets.



**Photo 2** - Perruche bleue



**Figure 1** - Constitution d'une plume

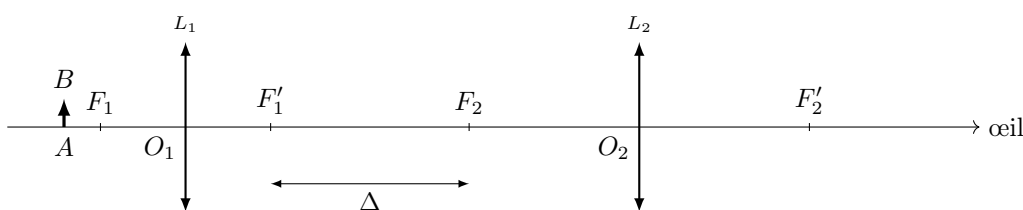
Afin de déterminer l'origine physique de cette couleur bleue, on observe une partie  $AB$  d'une plume de perruche à l'aide d'un microscope optique.

Pour cela, on dispose :

- d'une première lentille,  $L_1$  (centre  $O_1$ , distance focale  $f'_1 = 1,2$  cm), qui porte le nom d'objectif ;
- d'une deuxième lentille,  $L_2$  (centre  $O_2$ , distance focale  $f'_2 = 2,0$  cm), qui porte le nom d'oculaire.

La distance qui sépare le foyer image  $F'_1$  de l'objectif et le foyer objet de  $F_2$  de l'oculaire est appelée intervalle optique, noté  $\Delta$ , avec ici  $\Delta = 16$  cm (**figure 2**).

L'observation se fait à l'aide d'un œil emmétrope (œil à vision normale) situé derrière l'oculaire.



**Figure 2** - Schéma du microscope

On se placera pour toute la suite dans les conditions de Gauss et dans l'approximation des petits angles. On note  $h$  la

taille de l'objet  $AB$  observé.

**Q.1** Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'œil emmétrope, où doit être située l'image finale  $A_2$  en sortie de  $L_2$  ? Dans quel plan se situe donc l'image intermédiaire  $A_1B_1$  ?

**Q.2** Reproduire sur la copie le schéma du microscope et tracer le chemin de deux rayons lumineux passant par l'extrémité  $B$  de l'objet, l'un parallèle à l'axe et l'autre passant par  $O_1$ . Faire apparaître sur ce schéma :

- l'image intermédiaire  $A_1B_1$  ;
- le diamètre angulaire  $\alpha'$  de l'image finale vue par l'œil.

**Q.3** Montrer que la grandeur  $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{AB}$ , appelée grandissement transversal de l'objectif, s'écrit :

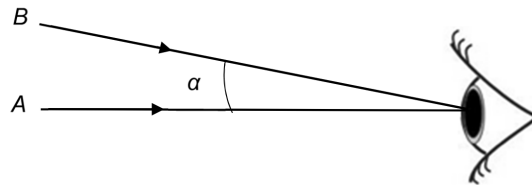
$$\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

**Q.4** En déduire l'expression du diamètre angulaire  $\alpha'$  de l'image vue par l'observateur au travers du microscope en fonction de  $f'_1$ ,  $f'_2$ ,  $h$  et de  $\Delta$ .

En l'absence de dispositif, l'œil voit net un objet situé à une distance comprise entre  $d_m$  et  $d_M$ , avec  $d_m < d_M$ .

**Q.5** Quels noms donne-t-on aux points objets correspondant à ces distances ? Donner une valeur à  $d_m$  et  $d_M$  pour un œil emmétrope.

**Q.6** Déterminer le diamètre angulaire  $\alpha$  de l'objet  $AB$  vu sans instrument et situé à une distance  $d_m$  de l'œil (**figure 3**).



**Figure 3** - Diamètre ou distance angulaire

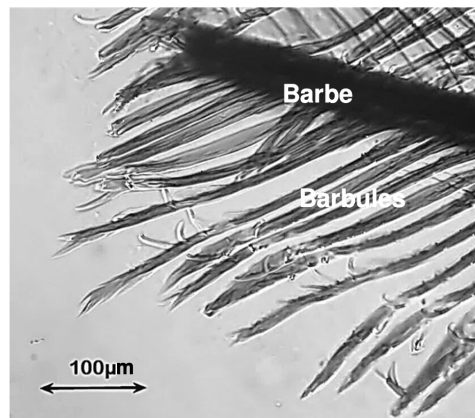
**Q.7** En déduire que la grandeur  $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha}$ , appelée grossissement commercial du microscope, s'écrit :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f'_1 f'_2}$$

Faire l'application numérique avec  $d_m = 25$  cm.

**Q.8** Un œil peut distinguer deux images ou deux objets si la distance angulaire les séparant est supérieure à la limite de résolution angulaire de l'œil  $\epsilon = 1'$  (une minute d'arc). Déterminer quelle sera la distance angulaire minimale  $\alpha_m$  entre deux objets vus au travers de ce microscope.

L'image d'une partie d'une plume est donnée ci-après (**photo 3**).



**Photo 3** - Image d'une plume de perruche à l'aide d'un dispositif non précisé

**Q.9** Par mesure sur la (**photo 3**, donner une estimation de la distance entre deux crochets situés au bout des barbules.

**Q.10** On rappelle que la résolution angulaire de l'œil nu est  $\epsilon = 1'$ . Ces crochets peuvent-ils être distingués directement sans instruments ? Pourront-ils être distingués avec le microscope utilisé précédemment ?

En explorant davantage la plume, on découvre qu'à l'intérieur des barbes apparaissent des couches fines parallèles et empilées de petits grains appelés microgranules (**figure 4**).

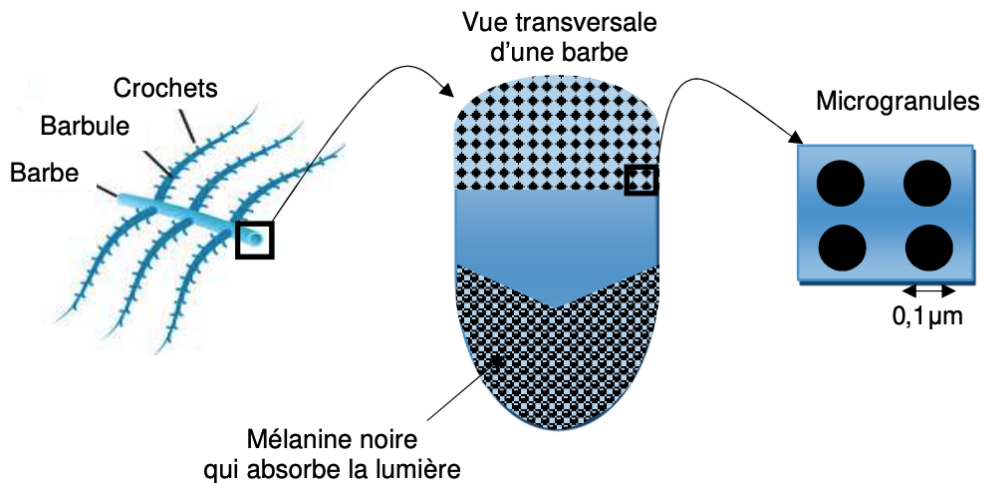


Figure 4 - Coupe transversale d'une barbe

Ces microgranules de petite taille sont responsables d'une diffusion de la lumière incidente (figure 5) :

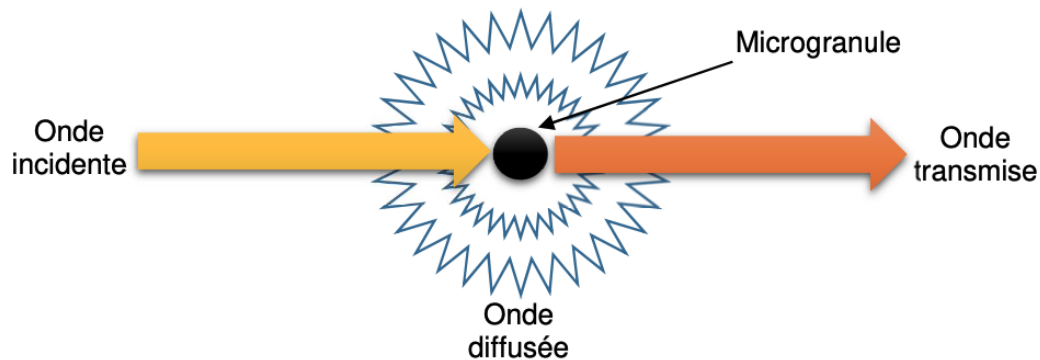


Figure 5 - Diffusion de la lumière par une microgranule

La puissance moyenne diffusée à travers une sphère, de centre une microgranule, est donnée par la formule :

$$\langle P \rangle = \alpha \omega^4$$

avec  $\alpha$  une constante de proportionnalité et  $\omega$  la pulsation du rayonnement incident.

**Q.11** Expliquer alors la couleur bleue prise par le plumage de la perruche lorsqu'elle est éclairée en lumière blanche. Que deviennent les radiations non diffusées ?

**Q.12** Par analogie avec un autre domaine de la physique, justifier que le premier étage de la barbe se comporte comme un filtre passe-bas en transmission.

## Problème 4 : Étude des oscillations du Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au-dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dis-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

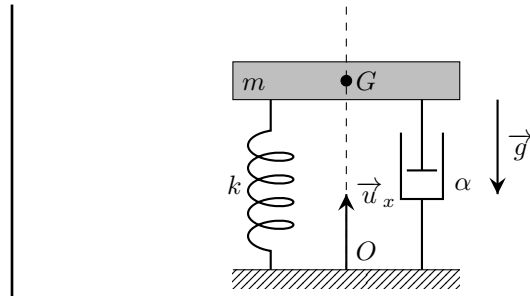


Figure 6 - Oscillateur

Un oscillateur mécanique amorti est constitué d'une masse  $m$  dont le centre d'inertie  $G$  est repéré par la position  $x(t)$  dans le référentiel galiléen  $(O, \vec{u}_x)$  (figure 6). L'origine  $O$  se situe au niveau du sol.

L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité  $\alpha$ , exerçant sur la masse  $m$  une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$ , avec  $\alpha > 0$ .

À tout instant  $t$ , on assimile la distance  $OG(t)$  à la longueur  $l(t)$  du ressort.

L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g \vec{u}_x$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Q.1** Le système étant supposé au repos dans un premier temps, exprimer sa position d'équilibre  $x_{eq}$  en fonction de  $l_0$ ,  $m$ ,  $g$  et  $k$ .

**Q.2** En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL2)

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0$$

dans laquelle on a introduit la variable  $X(t) = x(t) - x_{eq}$ . On précisera les expressions de  $\omega_0$  et  $\xi$  en fonction des paramètres du système. Quelle est la signification, l'unité et la dimension des constantes  $\omega_0$  et  $\xi$  ?

En régime libre, le système est mis en vibration par les conditions initiales  $X(0) = X_0$  et  $\dot{X}(0) = V_0$ .

**Q.3** Résoudre l'EDL2 et déterminer la solution générale  $X(t)$  en régime libre dans le cas où  $\xi = 0$ .

On exprimera la solution  $X(t)$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $X_0$ ,  $V_0$  et  $t$ . Comment qualifie-t-on un tel système physique ?

**Q.4** Résoudre l'EDL2 et déterminer la solution générale  $X(t)$  dans le cas où  $0 < \xi < 1$ . Quelle est la nature du régime transitoire associé ? Représenter graphiquement l'évolution de la solution  $X(t)$ .

**Q.5** Dans certains cas le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse qui s'écrit  $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \vec{u}_x$  avec  $\beta > 0$ .

Quelle peut être la conséquence de ce phénomène ?

*Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage)  $F(t)$  de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.*

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte.

La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

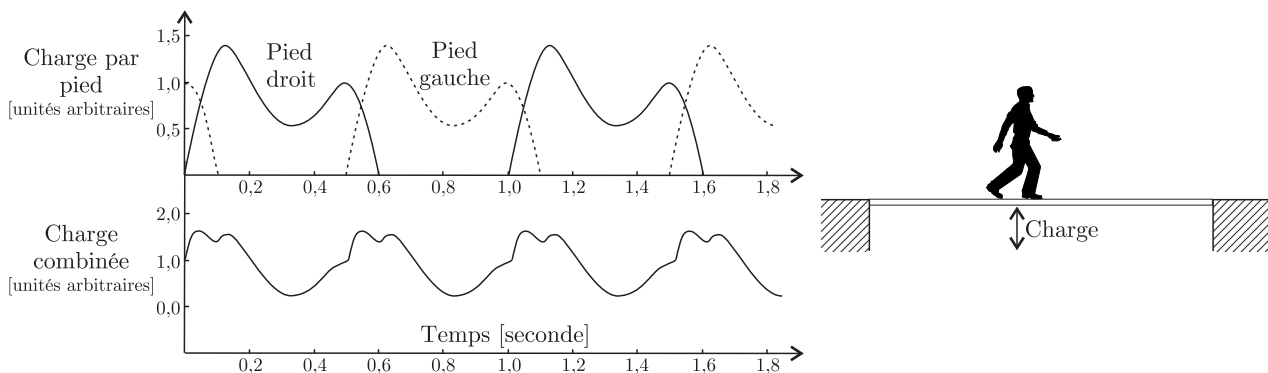


Figure 7 - Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représentons cette force, appelée *charge*, par le vecteur :

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1(t) \quad \text{avec} \quad \vec{F}_0 = -F_0 \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_1 = -F_1 \cos(2\pi ft) \vec{u}_x$$

où  $\vec{F}_0$  correspond à la force statique exercée par les piétons, c'est-à-dire leur poids, dirigée selon  $-\vec{u}_x$ . Le vecteur  $\vec{F}_1$  correspond à la force périodique orientée aussi selon  $-\vec{u}_x$ , où  $f$  correspond à la fréquence de la marche. On considèrera que  $F_1 = 0,4F_0$ .

**Q.6** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la variable  $Y(t) = X(t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  quand le système mécanique est «excité par les piétons» est de la forme :

$$\ddot{Y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{Y}(t) + \omega_0^2Y(t) = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

**Q.7** Lorsque les piétons se déplacent sur le pont, la variable  $Y(t)$  peut s'exprimer selon  $Y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$ . Justifier l'expression de  $Y(t)$ .

**Q.8** Définir l'amplitude complexe  $\underline{Y}_m(j\omega)$  associée au signal complexe  $\underline{Y}(t)$  puis montrer que :

$$\underline{Y}_m(j\omega) = \frac{-F_1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_0\xi}$$

On définit la fonction de transfert complexe  $\underline{H}(j\omega)$  par  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}(t)}{\underline{E}(t)}$  où  $\underline{E}$  est la représentation complexe de l'excitation définie par le rapport :  $\underline{E}(t) = \frac{F_1(t)}{m}$

**Q.9** Montrer que  $\underline{H}(jx) = \frac{1/\omega_0^2}{1 - x^2 + 2j\xi x}$  où  $x$  est la pulsation réduite définie par  $x = \omega/\omega_0$ .

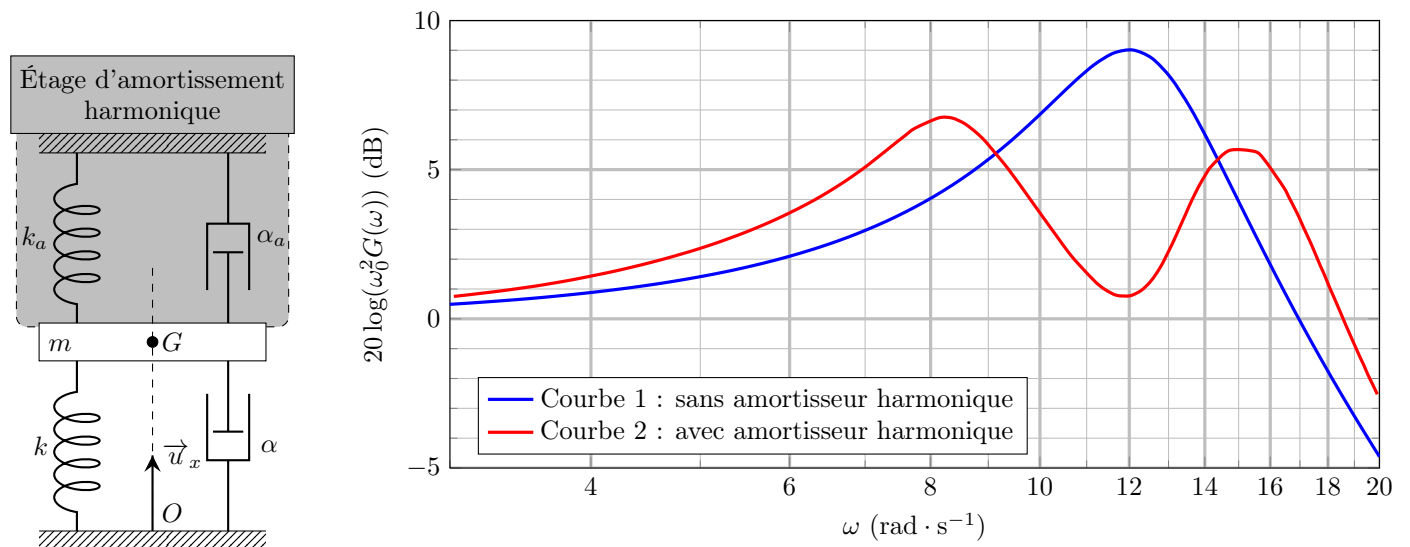
**Q.10** Définir le phénomène de résonance. Sous quelle condition portant sur  $\xi$  un phénomène de résonance peut-il se produire pour le gain  $G(x)$  défini par  $G(x) = |\underline{H}(jx)|$  ? Déterminer soigneusement l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$ .

**Q.11** Montrer que dans la limite  $\xi^2 \ll 1$ , le gain à la résonance s'exprime par  $G(x_r) \simeq \frac{1}{2\omega_0^2\xi}$ .

**Q.12** En se plaçant dans l'hypothèse  $\xi^2 \ll 1$  et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 8, déterminer un ordre de grandeur de  $\xi$ .

**Q.13** Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

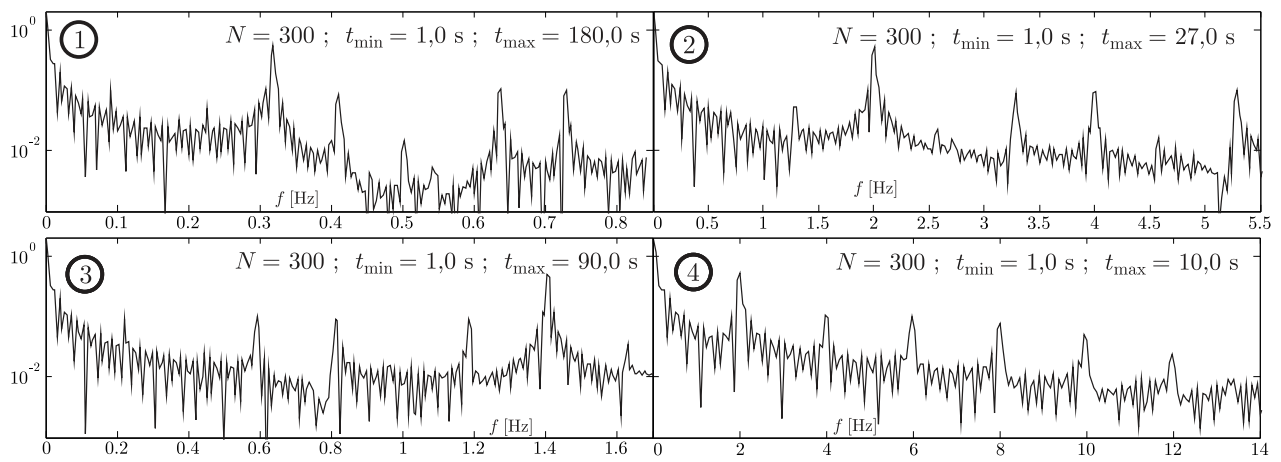
Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.



**Figure 8** - Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 7.

On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en  $N = 300$  points équidistants sur un intervalle  $[t_{\min}, t_{\max}]$ . Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 9.



**Figure 9** - Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

- Q.14** Analyser et interpréter ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?
- Q.15** À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

... **FIN** ...